

## Table des matières

<b>Préface</b>	<b>vii</b>
<b>Auteurs et rédacteurs</b>	<b>xi</b>
<b>Leçon 1. Xavier Viennot. Énumérons! De la combinatoire énumérative classique aux nouvelles combinatoires : bijective, algébrique, expérimentale, quantique et... magique!</b>	<b>1</b>
Combinatoire énumérative . . . . .	1
Quelques souvenirs d'école : le « triangle de Pascal », les permutations, les dérangements . . . . .	1
Les matrices à signes alternants . . . . .	3
Les nombres de Catalan . . . . .	4
L'énigme des nombres d'Hipparque . . . . .	8
Comment passer de la définition combinatoire à l'équation fonctionnelle . . . . .	11
Combinatoire bijective . . . . .	14
Preuves bijectives . . . . .	15
Objets combinatoires valués . . . . .	18
Interprétation d'objets combinatoires . . . . .	21
Le paradigme bijectif . . . . .	27
Combinatoire algébrique . . . . .	28
Représentations irréductibles des groupes et tableaux de Young standards . . . . .	28
Correspondance de Robinson-Schensted et jeu de taquin	31
Fonctions de Schur et algèbre plaxique . . . . .	32
Les déterminants et les chemins qui ne se coupent pas .	35
Polynôme de Jones . . . . .	42
Différences divisées, polynômes de Schubert, Fomin-Kirillov . . . . .	46
Deux tours de force : partitions planes et matrices à signes alternants . . . . .	50
Dix formules : un produit divisé par un produit . . . . .	50
TSSCPP . . . . .	51

De TSSCPP aux matrices à signes alternants . . . . .	54
Résolution combinatoire d'équations différentielles . . . . .	56
Combinatoire et physique statistique . . . . .	58
Animaux dirigés . . . . .	58
Les hexagones durs . . . . .	60
La théorie des champs bidimensionnelle . . . . .	62
Appendice : dix problèmes ouverts . . . . .	64
Note ajoutée en mai 2006, par X. Viennot . . . . .	68
Bibliographie . . . . .	71

## Auteurs et rédacteurs

Benoît Perthame (École Normale Supérieure de Paris)

*Quelques équations de transport apparaissant en biologie*

Leçon donnée le jeudi 3 avril 2003

Rédigée par Éric Charpentier

Jeffrey Rauch (Université du Michigan)

*À travers un prisme*

Leçon donnée le jeudi 30 janvier 2003

Rédigée par Benjamin Teixier

Nicole El Karoui (École Polytechnique, Palaiseau)

*Gestion dynamique des risques dans les marchés financiers*

Leçon donnée le jeudi 13 mars 2003

Rédigée par François Dufour et Arnaud Gloter

Marc Yor (Université Paris 6 et Académie des Sciences)

*Le mouvement brownien : une martingale exceptionnelle et néanmoins générique*

Leçon donnée le jeudi 4 mars 2004

Rédigée par Éric Charpentier

Wendelin Werner (Université Paris sud, Orsay)

*Lacets et invariance conforme*

Leçon donnée le jeudi 3 novembre 2005

Rédigée par Jean-François Marckert

Xavier Viennot (LaBRI, Bordeaux)

*Énumérons ! De la combinatoire énumérative classique aux nouvelles combinatoires : bijective, algébrique, expérimentale, quantique et... magique !*

Leçon donnée le jeudi 5 décembre 1996

Rédigée par Éric Charpentier et Meriem Zemhari

Bernard Teissier (Institut de Mathématiques de Jussieu)

*Volumes des corps convexes, géométrie et algèbre*

Leçon donnée le jeudi 7 octobre 1999

Rédigée par Carine Reydy

Dominique Cerveau (Université de Rennes 1)

*Champs d'hyperplans*

Leçon donnée le jeudi 7 novembre 2002

Rédigée par Olivier Ripoll

Fabien Morel (Université LMU de Munich)

*Groupes d'homotopie de sphères algébriques et formes quadratiques*

Leçon donnée le jeudi 9 novembre 2000

Rédigée par Bertrand Asseray

Pierre Berthelot (Université de Rennes 1)

*Points rationnels des variétés algébriques sur les corps finis : l'approche  $p$ -adique*

Leçon donnée le jeudi 8 janvier 2004

Rédigée par Floric Tavares

Bruno Kahn (Université Paris 7)

*Motifs*

Leçon donnée le 6 novembre 2003

Rédigée par Rémy Eupherte

Laurent Lafforgue (IHÉS et Académie des Sciences)

*Formules de traces et programme de Langlands*

Leçon donnée le jeudi 2 octobre 2003

Rédigée par Francis Brown

[page blanche]

Xavier Viennot

**Énumérons ! De la combinatoire énumérative  
classique aux nouvelles combinatoires : bijective,  
algébrique, expérimentale, quantique et... magique !**

À la mémoire de Marcel-Paul Schützenberger  
(1920-1996).

**Combinatoire énumérative**

**Quelques souvenirs d'école : le « triangle de Pascal », les permutations, les dérangements**

Pour chacun de nous, le mot « combinatoire » évoque quelques souvenirs d'école. On pense d'abord au nombre de façons de choisir  $p$  objets parmi  $n$  objets (nombre de *combinaisons*) : c'est (donc) aussi le coefficient de  $x^p$  dans le développement du binôme  $(1+x)^n$ . On le note  $\binom{n}{p}$  (à l'école on le notait  $C_n^p$ ), et on se souvient qu'on peut calculer ces nombres au moyen du « triangle de Pascal » : c'est un tableau dans lequel  $\binom{n}{p}$  figure à l'intersection de la  $n$ -ième rangée et de la  $p$ -ième colonne ; on le construit de proche en proche par la règle  $\binom{n}{p} = \binom{n-1}{p-1} + \binom{n-1}{p}$  :

1									
1	1								
1	2	1							
1	3	3	1						
1	4	6	4	1					
1	5	10	10	5	1				
1	6	15	20	15	6	1			
1	7	21	35	35	21	7	1		
1	8	28	56	70	56	28	8	1	
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋱

On pense également aux permutations. Pour les mathématiciens, une permutation est une bijection de  $\{1, \dots, n\}$  sur lui-même ; pour les informaticiens, c'est un mot écrit sur les lettres  $1, 2, \dots, n$ , où chaque lettre apparaît une fois et une seule ; pour les enfants, on prend des cartes numérotées de  $1$  à  $n$ , on les mélange, on les met dans le désordre. Il y a  $n!$  permutations de  $n$  objets, où  $n! = 1 \times 2 \times \dots \times n$ . Avec cette notation, on a aussi une formule très condensée pour le nombre de combinaisons :  $\binom{n}{p} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$ .

Peut-être avez-vous également entendu parler des *dérangements*? Des gens vont au théâtre, donnent leurs chapeaux au vestiaire, et puis, en repartant, ils reprennent un chapeau au hasard : quelle est la probabilité que personne ne reparte avec le chapeau qu'il avait amené? C'est le nombre  $d_n$  de permutations sans point fixe (ou « dérangements »), divisé par  $n!$  (nombre total de permutations). On montre facilement que

$$d_n = n! \left( 1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \dots + (-1)^n \frac{1}{n!} \right). \quad (1)$$

La probabilité  $d_n/n!$  tend vers  $1/e$  quand  $n$  tend vers l'infini : c'est un résultat d'Euler ([16], 1751).<sup>(1)</sup>

On voit qu'on sait déterminer exactement les nombres de combinaisons, de permutations, de dérangements. Eh bien c'est cela qu'on appelle la *combinatoire énumérative* : si on désigne par  $a_n$  le nombre de façons de faire ceci ou cela avec  $n$  choses élémentaires, on cherche une *formule exacte* pour  $a_n$ . Pour résoudre ce type de problèmes, on dispose d'un outil très commode, qui s'appelle la *série génératrice* des  $a_n$  : c'est la somme formelle

$$f(t) = \sum_{n \geq 0} a_n t^n.$$

Dans beaucoup de cas, on peut trouver une équation vérifiée formellement par  $f$ . Si on parvient à la résoudre, on peut exprimer les  $a_n$  (nous allons voir un exemple dans un instant).

---

<sup>1</sup>Le problème considéré par Euler était celui du *jeu de rencontre* : « *Le Jeu de rencontre est un Jeu de Hazard, où deux personnes ayant chacune un entier jeu de cartes, en tirent à la fois une carte après l'autre, jusqu'à ce qu'il arrive, qu'elles rencontrent la même carte.* » L'un des joueurs parie qu'il y aura rencontre, l'autre qu'il n'y en aura pas. « *Cela posé, on demande la probabilité, que l'une et l'autre de ces personnes aura de gagner.* » On jouait ordinairement avec des jeux de 52 cartes : l'approximation  $1 - 1/e$  pour la probabilité d'une rencontre est indiscernable de la valeur exacte. (N.d.R.)

La combinatoire énumérative, c'est le royaume du signe =, c'est l'art d'écrire des égalités exactes, par opposition à la *combinatoire analytique* (née avec Jacques Bernoulli, Moivre et — surtout — Laplace), où règne le signe  $\approx$ , et qui consiste à chercher des approximations : des encadrements, des équivalents asymptotiques (comme  $d_n \sim n!/e$  pour le nombre de dérangements, au lieu de l'égalité exacte (1)). Quant au problème des quatre couleurs, par exemple, c'est ce que j'appelle la *combinatoire existentielle*, c'est le royaume du signe  $\exists$ . Dans cette Leçon, je vous propose une promenade au royaume du signe =.

### Les matrices à signes alternants

Pour vous présenter une extension de la factorielle, je vais vous donner un autre problème combinatoire, moins évident que de compter des permutations (il y a deux mille ans, les gens comptaient déjà les permutations). Je vais vous raconter une histoire : ce n'est pas *Alice au Pays des Merveilles*, mais c'est une histoire concernant son auteur. Vous savez sûrement que cet écrivain, usuellement connu sous le pseudonyme de Lewis Carrol, était aussi un mathématicien connu sous son véritable nom : Charles Dodgson. En 1866, il a découvert une nouvelle façon efficace de calculer les déterminants, en ramenant le calcul d'un déterminant d'ordre  $n$  à celui d'un déterminant d'ordre  $n - 1$  et ainsi de suite : c'est ce qu'il a appelé la méthode de « condensation des déterminants » [15]. En étudiant cette méthode, au début des années 1980, trois combinatoristes américains (Mills, Robbins et Rumsey [39]) ont été amenés à dégager la notion de *matrices à signes alternants* : ce sont les matrices formées uniquement avec les nombres 1,  $-1$ , 0, avec les propriétés suivantes :

- la somme des nombres dans chaque ligne et dans chaque colonne est égale à 1 ;
- les signes + et – alternent quand on parcourt une ligne ou une colonne sans tenir compte des 0.

Par exemple :

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Évidemment, s'il n'y a pas de  $-1$  c'est une matrice de permutation : les matrices à signes alternants sont donc des généralisations des permutations. La méthode de Dodgson conduit à une sommation sur ces objets-là, alors que seules les permutations interviennent dans la formule classique du déterminant.

En 1983, Mills, Robbins et Rumsey [40] ont conjecturé que le nombre de matrices à signes alternants est égal à

$$S_n = \prod_{i=0}^{n-1} \frac{(3i+1)!}{(n+i)!} = \frac{1!4!\cdots(3n-2)!}{n!(n+1)!\cdots(2n-1)!}.$$

Ce sont les nombres

$$1, 2, 7, 42, 429, 7436, \dots$$

Cette conjecture a résisté pendant plus de 12 ans. Elle vient d'être démontrée, mais la preuve est d'une complexité inouïe — je vous en reparlerai à la fin de l'exposé. Voilà donc un exemple de problème très simple, avec une solution très simple, et une preuve absolument apocalyptique, qui fait intervenir des idées venues de la physique statistique, etc. C'est une des merveilles de la combinatoire énumérative. L'un des dix problèmes ouverts dont je vous ai distribué la liste<sup>(2)</sup> consiste à trouver une explication, une preuve combinatoire *conceptuellement simple* de cette formule.

### Les nombres de Catalan

Revenons à des choses très simples. Une formule classique concerne le nombre d'arbres binaires. Un arbre binaire, c'est un arbre dont chaque branche ne peut bifurquer qu'en deux branches (voir fig. 1).

Si je compte le nombre d'arbres binaires ayant  $n$  sommets internes (donc  $n+1$  feuilles) j'obtiens une suite de nombres  $(C_n) = 1, 1, 2, 5, 14, 42, \dots$  C'est très facile à compter car, par sa définition même, si dans un arbre binaire j'enlève la racine, ce qui pend de part et d'autre ce sont deux autres arbres binaires. Autrement dit, un arbre binaire à  $n+1$  sommets internes est un choix de deux arbres binaires dont la somme des nombres de sommets est  $n$ , et cette construction récursive se traduit par une belle relation de récurrence :

$$C_{n+1} = \sum_{i+j=n} C_i C_j, \quad C_0 = 1. \quad (2)$$

<sup>2</sup>On trouvera cette liste en appendice à la fin de cette *Leçon*. (N.d.R.)

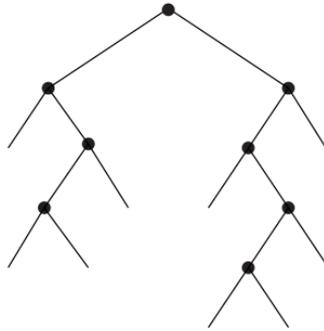


Fig. 1. Un arbre binaire à 8 sommets internes, désignés par un point noir, et 9 feuilles (ou sommets externes) symbolisées par le bout des arêtes pendantes

Cette relation, à son tour, va se traduire par une équation algébrique du second degré sur la série génératrice

$$y = \sum_{n \geq 0} C_n t^n = 1 + t + 2t^2 + 5t^3 + 14t^4 + 42t^5 + \dots,$$

à savoir l'équation :

$$y = 1 + ty^2, \quad (3)$$

que l'on résout par les formules élémentaires pour l'équation du second degré :

$$y = \frac{1 - (1 - 4t)^{1/2}}{2t},$$

et puis on développe le résultat en série entière par la formule du binôme de Newton

$$(1 + u)^m = 1 + m \frac{u}{1!} + m(m-1) \frac{u^2}{2!} + \dots$$

avec  $m = 1/2$ ,  $u = -4t$ ; on obtient cette belle formule pour le nombre d'arbres binaires à  $n$  sommets internes :

$$C_n = \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n} \quad (4)$$

où  $\binom{2n}{n} = \frac{(2n)!}{n!n!}$  : voilà, typiquement, un problème classique de combinatoire énumérative, telle qu'on la pratiquait au XIX<sup>e</sup> siècle.

Les nombres  $C_n$  interviennent partout en mathématiques (et aussi en physique théorique). Ils sont connus sous le nom de *nombre de Catalan*, car Eugène Catalan leur a consacré plusieurs notes dans les volumes de 1838 et 1839 du *Journal de mathématiques pures et appliquées* (Journal de Liouville). La raison pour laquelle Catalan s'est intéressé à ces nombres mérite d'être racontée. Dans un article publié par l'Académie de Saint-Petersbourg en 1758-1759, Jan Segner avait cherché à résoudre un problème que lui avait posé Euler : compter le nombre de triangulations d'un polygone régulier à  $n$  côtés par des diagonales qui, prises deux à deux, ne se coupent pas. Il y en a  $C_{n-2}$  (exercice !). Segner avait donné la récurrence (2) et en avait tiré une table des 20 premiers nombres  $C_n$  ; dans le même volume, un commentateur anonyme (qui ne peut être qu'Euler !) avait signalé que seules les 15 premières valeurs fournies par Segner étaient correctes et avait donné (sans démonstration) une récurrence multiplicative pour  $C_n$ , qu'on peut écrire

$$2(2n + 1)C_n = (n + 2)C_{n+1}$$

(remarquez que cela équivaut à la formule (4)). En fait, dans une lettre à Goldbach en 1751, Euler donne la formule (4) et la série génératrice des  $C_n$ . En 1838, Liouville posa « à divers géomètres » le problème suivant (qui lui avait été proposé par l'érudit Olry Terquem) : démontrer la formule de récurrence d'Euler, en partant si on veut de celle de Segner (qui est facile à justifier). Gabriel Lamé a été le premier à lui envoyer une solution (voir le volume de 1838 du Journal de Liouville). Un peu plus tard (dans le volume de 1839), Jacques Binet a donné une autre solution, qui est celle que je viens de présenter (avec la fonction génératrice). Entre-temps (volume de 1838), Olinde Rodrigues avait donné une preuve directe de la formule de récurrence d'Euler sans passer par celle de Segner, et Catalan avait commencé à étudier les nombres  $C_n$  pour eux-mêmes (il écrit notamment la formule (4)). Il est amusant de voir que dans un article de 1886, Catalan appelle « nombres de Segner » les nombres qui portent aujourd'hui son nom, tandis que les « nombres de Catalan » auxquels il se réfère (ainsi dénommés par l'amiral de Jonquières) sont d'autres nombres, qui ne portent plus son nom aujourd'hui !

Les nombres de Catalan permettent de compter bien d'autres choses que les arbres binaires ou les triangulations des polygones. Par exemple, ils comptent les « chemins de Dyck » : ce sont les chemins

dans le plan qui partent du niveau 0, qui font des pas nord-est ou sud-est, sans jamais descendre en dessous du niveau 0, et puis qui reviennent au niveau 0; cela demande un nombre pair de pas : on voit tout de suite qu'il y a 1 chemin de Dyck à deux pas, 2 chemins de Dyck à quatre pas, 5 chemins de Dyck à six pas, etc. : ce sont bien les nombres de Catalan!

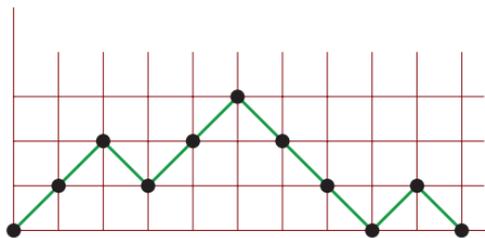


Fig. 2. Un chemin de Dyck à 10 pas

On peut présenter les nombres de Catalan à des élèves d'école primaire — je vais d'ailleurs faire l'expérience samedi matin dans l'école primaire de mon village! Vous pouvez leur faire compter les arbres binaires : ils en trouveront 1, 1, 2, 5, 14, etc. Faites-leur compter les chemins de Dyck : ils vont trouver les mêmes nombres. Les triangulations des polygones : encore les mêmes nombres. Puis on peut passer de la géométrie à l'arithmétique. Par exemple, dans le triangle de Pascal, prenez les deux plus grands éléments de chaque ligne de rang impair et calculez leur différence : vous obtenez 1,  $2 - 1 = 1$ ,  $6 - 4 = 2$ ,  $20 - 15 = 5$ ,  $70 - 56 = 14, \dots$  : on reconnaît les nombres de Catalan.

Toujours dans le triangle de Pascal, entourez le plus grand élément de chaque ligne de rang impair : vous obtenez les nombres 1, 2, 6, 20, 70,  $\dots$  : divisez-les respectivement par 1, 2, 3, 4, 5,  $\dots$  : vous retrouvez encore les nombres de Catalan.

Les nombres de Catalan se calculent aussi par un triangle analogue à celui de Pascal, mais où la règle est changée : chaque nombre est la somme de ses voisins de gauche et du dessus ( $a_{i,j} = a_{i,j-1} + a_{i-1,j}$ ) ; les

nombre de Catalan apparaissent sur la diagonale<sup>(3)</sup> :

1						
1	1					
1	2	2				
1	3	5	5			
1	4	9	14	14		
1	5	14	28	42	42	
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮

Vous pouvez, de cette façon, faire pratiquer l'addition, la soustraction, la multiplication, la division aux élèves de l'école primaire : à chaque fois ils trouvent les mêmes nombres (les « nombres de Catalan »), et ils trouvent cela magique !

### L'énigme des nombres d'Hipparque

La combinatoire est beaucoup plus vieille qu'on ne le pense. Par exemple, le triangle de Pascal était bien connu en Inde, dans le monde arabe et en Chine, plusieurs siècles avant Pascal<sup>(4)</sup>. (Les Chinois, à l'époque de notre Moyen Âge, connaissaient aussi les nombres eulériens et beaucoup d'autres nombres de la combinatoire.) Voici un exemple moins connu et plus surprenant. Plutarque écrit dans ses *Morales* (cf. [1]) :

« [Chrysippe] dit que le nombre de propositions composées que l'on peut faire à partir de seulement dix propositions simples dépasse un million [...] L'assertion de Chrysippe est réfutée par tous les arithméticiens, dont Hipparque lui-même, qui a montré que l'erreur de calcul [de Chrysippe] est énorme puisqu'en fait il y a 103049 propositions composées affirmatives, et 310952 avec négation. »

L'interprétation de ce passage a posé une grande énigme aux historiens, aux philosophes, aux mathématiciens : qu'avait compté Hipparque, au juste ? Ce n'est qu'en janvier 1994 qu'un étudiant, David S.

<sup>3</sup>Ce tableau apparaît dès 1800 dans le traité *Du calcul des dérivations* de Louis Arbogast, faisant suite aux travaux de Laplace sur les probabilités. Il est directement lié à l'interprétation des nombres de Catalan par les chemins de Dyck, ou encore par les chemins minimaux du « problème du scrutin », apparu dans la littérature vers la fin du XIX<sup>e</sup> siècle (Désiré André, Joseph Bertrand...). (N.d.A.)

<sup>4</sup>Ajoutons d'ailleurs que même en Europe, le « triangle de Pascal » était connu avant Pascal. Par exemple, Albert Girard, dans son « *Invention nouvelle en l'Algèbre* » (Amsterdam, 1629) le présente comme une chose bien connue, sous le nom de « *triangle d'extraction* ». (N.d.R.)

Hough, a résolu la première partie de l'énigme (cf. [45]), en remarquant que 103049 est *le dixième nombre de Schröder*  $s(10)$ . De quoi s'agit-il? Le  $n$ -ième nombre de Schröder,  $s(n)$ , est le nombre de parenthésages possibles d'un mot de  $n$  lettres, en excluant les parenthèses inutiles, c'est-à-dire celles qui ne renferment qu'une seule lettre, ou qui renferment tout le mot, ou les parenthèses multiples (comme  $((ab))c\dots$ ). Par exemple,  $s(3) = 3$  car les parenthésages possibles sont

$$abc \quad (ab)c \quad a(bc)$$

De même,  $s(4) = 11$ , comme on le voit ci-dessous :

$$\begin{aligned} &abcd \quad (ab)cd \quad a(bc)d \quad ab(cd) \quad (abc)d \quad a(bcd) \\ &((ab)c)d \quad (a(bc))d \quad (ab)(cd) \quad a((bc)d) \quad a(b(cd)). \end{aligned}$$

Si chaque parenthèse regroupe deux objets (lettres ou parenthèses, qui elles-mêmes regroupent deux objets, etc.), on a ce que l'on appelle un *parenthésage binaire*; les parenthésages binaires correspondent aux arbres binaires, ils sont donc comptés par les nombres de Catalan; par exemple, pour  $n = 3$ , il y en a deux :  $(ab)c$  et  $a(bc)$ ; pour  $n = 4$ , il y en a cinq : les cinq derniers ci-dessus. Les nombres de Schröder sont donc une variante des nombres de Catalan : au lieu de compter les arbres (ou les parenthésages) binaires, on compte tous les arbres plans (tous les parenthésages).

Si les Grecs de l'Antiquité connaissaient réellement les nombres de Schröder, ils étaient donc proches des nombres de Catalan! Or, l'interprétation de David Hough, pour qui le 103049 d'Hipparque correspond au nombre de parenthésages de dix propositions, est très probablement correcte. En effet, le livre de Sloane, et puis celui de Plouffe et Sloane, contiennent toutes les suites de nombres que l'on trouve dans la littérature mathématique, physique, chimique, enfin partout : il y en avait deux mille, puis quatre mille dans le nouveau livre, et il y en a dix mille dans la version électronique<sup>(5)</sup>; or, si on cherche le nombre 103049 dans le Sloane, on constate qu'il est dans très peu de suites et que seule celle de Schröder semble permettre de donner un sens à l'affirmation de Plutarque. C'est donc sûrement les parenthésages que comptait Hipparque.

Au fait, comment un Grec de l'Antiquité (Hipparque vivait deux siècles avant notre ère!) a-t-il pu calculer ce 103049? Aujourd'hui,

<sup>5</sup><http://www.research.att.com/~njas/sequences/index.html>

on utilise une récurrence. La récurrence la plus facile fait intervenir les partitions d'entiers : est-ce ce qu'a fait Hipparque ?<sup>(6)</sup> En tout cas, il y a deux mille ans, on faisait probablement beaucoup plus de combinatoire que l'on ne l'a pensé jusqu'ici.

Quant au second nombre d'Hipparque, 310952, qui donnait le nombre de propositions composées avec dix propositions simples et « avec négation », jusqu'ici personne n'avait trouvé à quoi il correspondait. On ne le trouve dans *aucune* suite du *Sloane* ! Et il y a quelques jours, Laurent Habsieger, de Bordeaux<sup>(7)</sup>, vient de trouver une explication, à condition de changer le 2 en 4 (donc à deux près !) : soient dix « propositions simples »  $x_1, \dots, x_{10}$  ; on peut interpréter le nombre de « propositions composées » négatives comme le nombre de parenthésages de la chaîne NON  $x_1 x_2 \dots x_{10}$ , avec la convention suivante : on prend la négation de toutes les propositions simples comprises dans la première paire de parenthèses contenant NON. Par exemple

$$(((\text{NON}(x_1(x_2x_3)x_4)x_5)x_6)x_7x_8)(x_9x_{10}))$$

est équivalent à

$$(((\bar{x}_1(\bar{x}_2\bar{x}_3)\bar{x}_4)\bar{x}_5)x_6)x_7x_8)(x_9x_{10}),$$

où  $\bar{x}$  désigne la négation de la proposition simple  $x$ . Regardons combien on obtient de propositions composées distinctes de cette façon. Comme les parenthésages  $(\text{NON}(P_1) \dots (P_k))$  et  $(\text{NON}((P_1) \dots (P_k)))$  sont équivalents, toutes les propositions composées négatives sont obtenues de deux façons, sauf celles où l'on prend seulement la négation de  $x_1$ , qui ne sont obtenues qu'une fois (car on écrit  $(\text{NON}(x_1))$  mais pas  $(\text{NON}((x_1)))$ , qui contient des parenthèses multiples). Par conséquent, le double du nombre de propositions composées négatives est égal au nombre total de parenthésages d'une chaîne de 11 éléments NON  $x_1 x_2 \dots x_{10}$ , plus le nombre total de parenthésages d'une chaîne de 10 éléments  $\bar{x}_1 x_2 \dots x_{10}$  : ce qui donne, pour le nombre cherché, la valeur  $(s(10) + s(11))/2 = 310954$ . C'est probablement cela (ou quelque chose d'équivalent) qu'Hipparque comptait — et alors soit il s'est légèrement trompé dans le calcul (ou bien son résultat nous a été mal

<sup>6</sup>On trouvera dans l'article [1] de Fabio Acerbi (2003) une discussion des calculs probables d'Hipparque, compte tenu des sources historiques. (N.d.R.)

<sup>7</sup>Aujourd'hui à l'Institut Girard Desargues, à l'université Claude Bernard (Lyon 1). Peu après Habsieger, Maxim Kazarian et Sergei Lando ont abouti à la même explication. Tous trois l'ont exposée dans un article en commun [25] en 1998. (N.d.R.)

transmis), soit il en excluait deux dans sa définition pour des raisons qui nous échappent.

### Comment passer de la définition combinatoire à l'équation fonctionnelle

Voilà pour l'histoire, passons aux méthodes modernes. Pour commencer, revenons au calcul des nombres de Catalan. Partir de la récurrence sur les arbres, donnée par l'équation (2), pour arriver à l'équation fonctionnelle (3), ce n'est pas très joli. Aujourd'hui, on a des méthodes systématiques, des outils combinatoires standards (mais pas forcément très profonds) qui permettent de passer directement de l'arbre à l'équation fonctionnelle. Un arbre binaire, c'est soit un point isolé, soit une racine avec deux arbres qui pendent de chaque côté :

$$\text{Arbre} = \bullet \quad \text{ou} \quad \begin{array}{c} \bullet \\ \swarrow \quad \searrow \\ \text{Arbre} \quad \text{Arbre} \end{array}$$

Les règles générales disent qu'il faut remplacer le point isolé par 1, l'arbre par  $y$  (la série génératrice), le « ou » exclusif par « + », la racine par  $t$  :

$$y = 1 + \begin{array}{c} t \\ \swarrow \quad \searrow \\ y \quad y \end{array}$$

ce qui conduit à l'équation algébrique  $y = 1 + ty^2$ , directement à partir de la définition combinatoire des arbres binaires.

Autre exemple : les partitions d'un entier. Une partition d'un entier, c'est une façon de décomposer un entier en somme d'entiers, sans tenir compte de l'ordre dans lequel on les écrit. On représente géométriquement une partition par un « diagramme de Ferrers » :

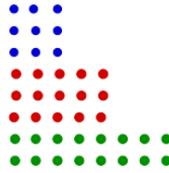


Fig. 3. Un diagramme de Ferrers

Prenons le nombre d'éléments de chaque ligne : 3, 3, 3, 5, 5, 5, 8, 8, et faisons la somme : on obtient  $3 + 3 + 3 + 5 + 5 + 5 + 8 + 8 = 40$ , ce qui veut dire que le diagramme de Ferrers ci-dessus représente cette partition du nombre 40. Quelle est la série génératrice des nombres de partitions ? À nouveau les lemmes standards de la combinatoire actuelle (et ce sont des lemmes qui marchent *automatiquement*) disent tout ce qu'il faut faire : on prend une ligne, on introduit une variable  $q$  ; une ligne de  $i$  cases correspond à  $q^i$  :

$$q^i \quad \bullet \bullet \bullet \bullet \quad (\text{ici } i = 4).$$

Un lemme standard dit que si vous avez un objet avec une série génératrice, l'inverse de « 1 moins la série génératrice » correspond aux suites finies d'objets du même type ; en particulier,  $(1 - q^i)^{-1}$  correspond aux suites finies d'objets du type  $q^i$ , ou encore aux tableaux rectangulaires à  $i$  colonnes

$$\frac{1}{1 - q^i} \quad \emptyset + \bullet \bullet \bullet \bullet + \begin{matrix} \bullet \bullet \bullet \bullet \\ \bullet \bullet \bullet \bullet \end{matrix} + \begin{matrix} \bullet \bullet \bullet \bullet \\ \bullet \bullet \bullet \bullet \\ \bullet \bullet \bullet \bullet \end{matrix} + \dots$$

Cela signifie que le coefficient de  $q^n$  dans  $(1 - q^i)^{-1}$  est égale au nombre de façons de représenter  $n$  sous la forme d'une suite finie de  $\bullet \bullet \dots \bullet$  ( $i$  points dans chaque élément) : 1 si  $n$  est multiple de  $i$  ; 0 sinon.

Ensuite faire le produit de ces expressions, c'est faire le produit (juxtaposition) des objets, donc c'est juxtaposer les rectangles. Votre diagramme de Ferrers se décompose en petits rectangles de largeurs 1, 2, 3, 4... (certains sont vides). Le produit  $\prod_{i=1}^m (1 - q^i)^{-1}$  est interprété par ce produit de rectangles, et puis en passant à la limite, vous obtenez le produit infini  $\prod_i (1 - q^i)^{-1}$ , qui vous donne la série génératrice des nombres de partitions des entiers, de manière automatique, très simple : le coefficient de  $q^n$  dans  $\prod_{i=1}^{\infty} (1 - q^i)^{-1}$  est égal au nombre de façons d'écrire  $n$  sous la forme d'un diagramme de Ferrers.

$$\frac{1}{(1-q)(1-q^2)\cdots(1-q^m)} \quad \cdots + \begin{array}{c} \bullet \bullet \bullet \\ \bullet \bullet \bullet \\ \bullet \bullet \bullet \end{array} + \cdots$$





On peut appliquer la même recette aux dérangements. On a vu tout à l'heure qu'un dérangement est une permutation qui n'a pas de cycle de longueur 1 (souvenez-vous des gens avec leurs chapeaux). Toute permutation se décompose en un dérangement et un ensemble sans structure (les points fixes) :

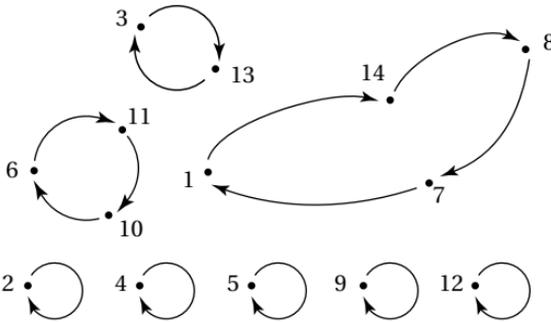


Fig. 4. Une permutation = un dérangement  $\times$  un ensemble

On exprime cette décomposition par la formule  $S = D \times E$ , où  $S, D, E$  sont des objets combinatoires symbolisant les permutations ( $S$  pour substitutions), dérangements et ensembles. Si vous considérez les séries génératrices *exponentielles*, c'est-à-dire  $\sum_{n \geq 0} a_n t^n / n!$  (au lieu de  $\sum_{n \geq 0} a_n t^n$ ), vous voyez que la série génératrice des ensembles sans structure est  $e^t$  (notons-la  $e(t)$ , pour « ensemble ») ; notons  $d(t)$  la série génératrice des dérangements,  $s(t)$  celle des permutations : la décomposition  $S = D \times E$  donne  $s(t) = e(t) \times d(t)$ , ou  $d(t)/s(t) = 1/e(t)$ . Ainsi, la probabilité d'avoir un dérangement, qui est  $d_n/n!$  et correspond au quotient de séries  $d/s = 1/e$ , tend vers le nombre  $1/e$  quand  $n$  tend vers l'infini : vous voyez, les notations sont bien faites !

Autre exemple :  $1/(1-t)$  est la série génératrice exponentielle des permutations (comptées par  $n!$ ), son logarithme est  $\sum t^n/n$ , qui est la série génératrice exponentielle des permutations circulaires (comptées par  $(n-1)!$ ). Autrement dit, *les permutations sont l'exponentielle des cycles, les cycles sont le logarithme des permutations*. (C'est un fait général : prendre le logarithme, c'est prendre les composantes connexes.) Et on peut effectivement vérifier que les théorèmes sur les permutations (factorisation en cycles...) se lisent au niveau des séries.

En fait, le calcul analytique n'est qu'une projection de ce qui se passe au niveau structurel, combinatoire. Tout cela s'appelle les structures exponentielles et fait partie de l'École québécoise du LACIM (Laboratoire de Combinatoire et d'Informatique Mathématique), à Montréal : on a des outils, des cadres théoriques, qui permettent de définir et de manipuler des sommes, produits, logarithmes, exponentielles, dérivées, intégrales d'objets combinatoires... Et quand on repasse au niveau analytique, en traduisant ces calculs en termes de fonctions génératrices, on ne fait que projeter ces structures, plus riches et plus compliquées, qui existent directement au niveau combinatoire.

Avec ces méthodes, pour les structures que l'on peut facilement décomposer en structures plus simples on obtient automatiquement les équations satisfaites par la série génératrice. Mais quand on a affaire à des objets pour lesquels il n'y a pas de décompositions simples (c'est le cas, par exemple, dans l'analyse d'algorithmes informatiques), on peut se tourner vers la *combinatoire bijective*.

## Combinatoire bijective

Qu'est-ce que c'est que la « *combinatoire bijective* »? Eh bien la façon dont on a montré que  $C_n = \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n}$  (p. 5) est un exemple typique de *ce que n'est pas* la combinatoire bijective : on a voulu compter les arbres binaires, on a écrit une série génératrice et puis on a complètement oublié les arbres : on a résolu une équation, développé la racine carrée en série entière... Maintenant, je voudrais garder les arbres de bout en bout du calcul. L'égalité à démontrer peut s'écrire  $(n+1)C_n = \binom{2n}{n}$ , et il s'agit de trouver une correspondance (une bijection) entre des objets qui sont comptés par le membre de gauche et des objets qui sont comptés par le membre de droite. À gauche, j'ai un arbre binaire (Catalan) que multiplie  $n+1$  : mais  $n+1$  est le nombre de feuilles, donc le membre de gauche compte les arbres binaires dans

lesquels on a pointé l'une des feuilles ; et à droite, c'est le nombre de façons de choisir  $n$  points parmi  $2n$  points — c'est le nombre de mots à  $2n$  lettres, avec (disons)  $n$  lettres rouges et  $n$  lettres noires. Alors, exercice : trouver une correspondance, une bijection entre les deux, qui permette de comprendre pourquoi il y a exactement autant d'arbres binaires pointés que de mots à  $n$  lettres rouges et  $n$  lettres noires. Voilà typiquement un problème de combinatoire bijective. Ce n'est pas si facile : cherchez, ce soir — ou maintenant, si la suite de la *Leçon* vous ennuie !

### Preuves bijectives

La combinatoire bijective consiste donc à prouver des identités du type

« un entier = un entier »

en interprétant le premier membre comme le nombre d'objets combinatoires d'un certain type, et le second membre comme le nombre d'objets d'un autre type, et en exhibant une bijection entre ces deux types d'objets, ce qui donne une interprétation de l'identité en la rendant évidente. La figure 5 montre un exemple.

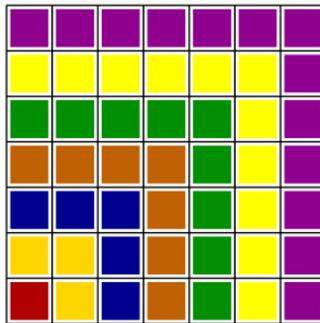


Fig. 5. Une preuve visuelle de  $n^2 = 1 + 3 + \dots + (2n - 1)$

C'est une preuve visuelle, comme celles que faisaient déjà les géomètres de l'Antiquité. Il n'y a rien à dire, il suffit de regarder la figure : elle parle d'elle-même.

Voici une identité entre deux séries formelles :

$$\sum_{n \geq 0} a_n t^n = \sum_{n \geq 0} b_n t^n.$$

Il faut montrer que  $a_n = b_n$  : on veut une preuve bijective. Pour cela, il faut trouver une interprétation combinatoire des nombres  $a_n$  et  $b_n$ , il faut être très inventif : il s'agit de trouver des objets combinatoires qui sont énumérés par les  $a_n$  et les  $b_n$ . Donc on *relève* l'identité au niveau combinatoire : en général on met des grandes lettres, et alors l'identité devient une conséquence de l'existence d'une bijection entre les deux classes d'objets  $\mathcal{A}_n$  et  $\mathcal{B}_n$ . Si vous voulez, la combinatoire *énumérative*, c'est  $f(t) = g(t)$ , et la combinatoire *bijective*, c'est  $F : \mathcal{A}_n \rightarrow \mathcal{B}_n$ . La combinatoire bijective vous donne une meilleure compréhension des objets : au lieu de faire des calculs analytiques épouvantables, vous *exhibez* une bijection, et pour la trouver vous devez *rentrer dans la structure de l'objet*.

Par exemple, voici une preuve bijective de l'identité

$$\sum_{n \geq 0} \frac{q^{n^2}}{[(1-q) \cdots (1-q^n)]^2} = \frac{1}{(1-q)(1-q^2) \cdots (1-q^i) \cdots} \quad (5)$$

Il s'agit de trouver une interprétation combinatoire des deux membres. Pour le membre de droite, on vient de le voir : ce sont les diagrammes de Ferrers ; quant au membre de gauche, il se décompose en trois morceaux : il y a le numérateur  $q^{n^2}$ , qui correspond à un carré de  $n$  lignes et  $n$  colonnes ; et il y a deux facteurs  $\frac{1}{(1-q) \cdots (1-q^n)}$  (ce sont les diagrammes de Ferrers ayant au plus  $n$  lignes, ou au plus  $n$  colonnes). Il faut montrer qu'il y a une bijection. C'est facile, regardez :

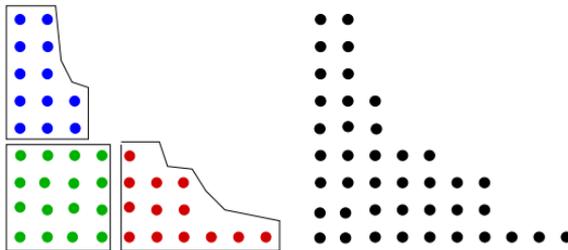


Fig. 6. Une preuve bijective de (5)

À droite j'ai un diagramme de Ferrers. À gauche, le bloc carré est le plus grand carré que l'on puisse extraire du diagramme de Ferrers. Quand vous l'avez extrait, il reste deux diagrammes de Ferrers ayant l'un au plus  $n$  lignes, l'autre au plus  $n$  colonnes (la taille du carré étant  $n$ ) : c'est tout ! Vous voyez qu'elle est très simple, cette identité, une fois que l'on en connaît la traduction combinatoire : et maintenant vous allez pouvoir la retenir sans aucune difficulté.

L'intérêt de cette preuve (et c'est toujours ce qui se passe quand on découvre un nouveau point de vue sur une identité ou un objet), c'est que vous pouvez immédiatement obtenir d'autres identités : par exemple, fixez un nombre  $a$ , et extrayez du diagramme de Ferrers le plus grand rectangle  $n \times (a + n)$  (au lieu de prendre un carré  $n \times n$ ) : votre identité initiale se généralise en toute une famille d'identités à un paramètre  $a$ .

Si vous ne prenez pas le carré au dénominateur, il se passe encore quelque chose d'intéressant : le membre de gauche devient exactement celui de *l'identité de Rogers-Ramanujan* :

$$\sum_{n \geq 0} \frac{q^{n^2}}{(1-q) \cdots (1-q^n)} = \prod_{n \equiv 1 \text{ ou } 4 \pmod{5}} \frac{1}{1-q^n}. \quad (6)$$

En fait, Srinivasa Ramanujan a conjecturé cette identité vers 1913, et il a découvert plus tard qu'elle avait été démontrée à la fin du XIX<sup>e</sup> siècle par Leonard James Rogers. C'est une identité beaucoup plus difficile que la précédente, et en trouver une preuve combinatoire a été un défi : George Andrews avait promis 100 dollars pour qui trouverait une telle preuve. Garsia et Milne ont donné une bijection, mais par une construction apocalyptique, qui fait intervenir ce que l'on appelle le *principe d'involution* ; si vous prenez un petit diagramme qui interprète le membre de gauche, il faut plusieurs minutes de calcul sur ordinateur (ou cent mille pages) pour arriver au diagramme correspondant dans le membre de droite. En fait, Schur avait donné une preuve qui commençait bijectivement, et qui se terminait par un calcul analytique. Garsia et Milne ont commencé comme Schur, et ensuite ils ont « bijectivisé » le calcul. Parfois, je promets dix bouteilles de vin à qui trouve une bijection, mais il y a des cas où on peut donner automatiquement une bijection, en « bijectivant » une preuve analytique : alors la bijection obtenue est épouvantable et, évidemment, je garde mes bouteilles !

Il est très facile de voir que le membre de gauche dans (6) est interprété par ce que l'on appelle les D-partitions : ce sont les partitions d'un entier telles que deux parts successives aient une différence au moins égale à deux. Par exemple,  $5 + 4$  n'est pas une D-partition de 9, parce que  $5 - 4 = 1$ . Et à droite, ce sont les partitions dont les parts sont égales à 1 ou 4 modulo 5. Vous pouvez constater que pour  $n = 9$ , il y en a bien cinq à gauche et cinq à droite :

$$\begin{array}{ll}
 9 = 9 & 9 = 9 \\
 = 8 + 1 & 9 = 4 + 4 + 1 \\
 = 7 + 2 & = 6 + 1 + 1 + 1 \\
 = 6 + 3 & = 4 + 1 + 1 + 1 + 1 \\
 = 5 + 3 + 1 & = 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1
 \end{array}$$

Et c'est vrai pour tout  $n$ . C'est un des dix problèmes que je vous ai distribués [cf. en appendice à la fin de la *Leçon*] : trouvez une preuve bijective, mais sans avoir à passer par la moulinette d'un ordinateur, où on perd tous les paramètres — je demande une belle preuve bijective. On peut même se demander s'il en existe une. Il faudrait formaliser cette notion de *belle bijection*... Alors que l'on connaît une dizaine de preuves analytiques, on ne connaît pas une seule *belle* preuve bijective.

Voici la deuxième identité de Rogers-Ramanujan,

$$\sum_{n \geq 0} \frac{q^{n+n^2}}{(1-q) \cdots (1-q^n)} = \prod_{n \equiv 2 \text{ ou } 3 \pmod{5}} \frac{1}{1-q^n} \quad (7)$$

où à gauche ce sont les D-partitions qui n'ont pas de part égale à 1, et à droite ce sont les partitions dont les parts sont égales à 2 ou 3 modulo 5. Pour  $n = 9$ , il y en a trois de chaque côté :

$$\begin{array}{ll}
 29 = 9 & 9 = 7 + 2 \\
 = 7 + 2 & 9 = 3 + 3 + 3 \\
 = 6 + 3 & = 3 + 2 + 2 + 2
 \end{array}$$

Là encore, c'est vrai pour tout  $n$ , et on demande une preuve bijective. Et il n'y a pas que ces deux identités : on en connaît beaucoup d'autres.

### Objets combinatoires valués

Vous pouvez croire que l'on n'a des identités que sur les séries formelles  $\sum_{n \geq 1} a_n t^n$  ; mais en fait on peut mettre des poids sur les objets

combinatoires : ces poids seront des variables formelles. Après coup, si vous voulez faire de l'analyse, vous pourrez remplacer ces variables formelles par des nombres réels ; si vous voulez faire de l'analyse complexe, vous mettrez des nombres complexes : vous mettrez ce que vous voudrez, et vous pourrez retrouver de l'analyse, des polynômes orthogonaux, de l'analyse numérique... Mais toute la partie *combinatoire* se fait avec des variables *formelles*, et au lieu de compter le *nombre* d'objets on cherche la *somme des poids* de tous les objets ayant la taille  $n$  :

$$a_n = \sum_{\xi; |\xi|=n} \nu(\xi). \quad (8)$$

Vous pouvez obtenir ainsi, par des moyens combinatoires, des myriades d'identités qui n'ont rien à voir avec la combinatoire ! Il « suffit » de trouver les bons objets, les bons poids, et il faut que la bijection conserve les poids.

Voici un exemple d'identité, avec des poids très simples :

$$\sum_{n \geq 0} H_n(x) H_n(y) \frac{t^n}{n!} = (1 - 4t^2)^{-\frac{1}{2}} \exp \left[ \frac{4xyt - 4(x^2 + y^2)t^2}{1 - 4t^2} \right], \quad (9)$$

où les  $H_n(x)$  sont les « polynômes d'Hermite », définis par leur série génératrice exponentielle :

$$\exp \left[ xt - \frac{t^2}{2} \right] = \sum_{n \geq 0} H_n(x) \frac{t^n}{n!}. \quad (10)$$

La formule (9) est *l'identité de Mehler*. Il y a quinze ans, la question d'une preuve combinatoire de cette identité était encore du domaine de la recherche ; aujourd'hui, avec les techniques dont nous disposons, ce n'est plus qu'un exercice, que l'on trouve dans tous les cours de combinatoire. Démonstrons-la.

Dans (10),  $t$  correspond aux cycles de longueur 1 (les points fixes), et  $xt$  c'est  $t$  avec le poids  $x$  ;  $\frac{t^2}{2}$  correspond aux cycles de longueur 2 ;  $-\frac{t^2}{2}$ , c'est  $\frac{t^2}{2}$  avec le poids  $-1$ . Une configuration interprétant le polynôme d'Hermite  $H_n(x)$  n'est pas autre chose qu'une involution sur  $\{1, 2, \dots, n\}$ . Le poids d'une telle configuration est le produit des poids de ses composantes élémentaires (points fixes et cycles de longueur deux<sup>(8)</sup>), et le polynôme d'Hermite est obtenu en faisant la somme des

---

<sup>8</sup>Remarque : une involution à  $p$  points fixes est un produit de  $p$  cycles de longueur 1

pois de toutes les configurations. Avec cela, on peut démontrer l'identité de Mehler (9). Dans le membre de gauche, il y a deux polynômes d'Hermite, que l'on superpose. Pour le membre de droite, si vous le voulez bien, je vais faire un petit calcul, une toute petite entorse à l'idéal bijectif : je vais faire passer le radical à l'intérieur !

$$\sum_{n \geq 0} H_n(x)H_n(y) \frac{t^n}{n!} = \exp \left[ \frac{1}{2} \ln \frac{1}{1-4t^2} + \frac{4xyt - 4(x^2 + y^2)t^2}{1-4t^2} \right]. \quad (11)$$

Voilà. Je préfère avoir l'exponentielle de quelque chose, plutôt qu'un produit. Maintenant, regardez ce que j'ai à l'intérieur de l'exponentielle : le membre de droite se décompose en quatre morceaux, qui correspondent exactement aux quatre types de composantes connexes des dessins de la figure 7. Quand vous superposez deux involutions,

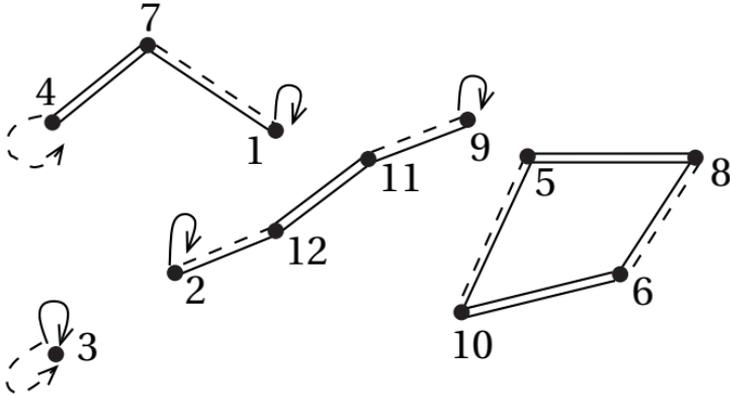


Fig. 7. Deux configurations d'Hermite superposées

vous avez soit des cycles qui alternent en rouge (représenté ici par des pointillés) et en bleu (représenté ici par un trait plein), soit des chaînes, et il y a trois types de chaînes, selon que les extrémités sont rouge-rouge, rouge-bleu ou bleu-bleu. Donc, dès que vous savez interpréter les logarithmes, les produits, etc. vous avez la preuve.

---

et de  $(n-p)/2$  cycles de longueur 2 (tous disjoints),  $p$  ayant nécessairement la même parité que  $n$  : le nombre de telles involutions est donc  $\frac{n!}{p! 2^{(n-p)/2} \left(\frac{n-p}{2}\right)!}$ . (N.d.R.)

Vous voyez, comme le dit notre collègue Karine Chemla, *en mathématiques, non seulement nous calculons sur des dessins, mais aussi nous dessinons des calculs*. Les calculs compliqués sont mis au niveau visuel, et nous calculons sur des dessins, des objets combinatoires : nous faisons la somme, le produit de deux dessins, le logarithme d'un dessin, l'intégrale d'un dessin, etc.

### Interprétation d'objets combinatoires

Un autre problème de combinatoire bijective est *d'interpréter*. Je viens de vous donner une interprétation combinatoire des polynômes d'Hermite. Voici maintenant une suite très célèbre dont il va falloir trouver une interprétation combinatoire :

$$1, 2, 16, 272, \dots, T_n, \dots$$

Comme dirait Vladimir Arnold, *elle commence par 1 et 2, donc vous l'avez tous reconnue!* De fait, tous ceux qui ont assisté à la *Leçon de Mathématiques d'Aujourd'hui* donnée ici même par Arnold [5] reconnaissent immédiatement la suite de nombres dont la fonction génératrice exponentielle est  $\tan t$  :

$$\tan t = \sum_{n \geq 0} T_n \frac{t^{2n+1}}{(2n+1)!} = t + 2\frac{t^3}{6} + 16\frac{t^5}{120} + \dots$$

On appelle donc les  $T_n$  les *nombres tangents*. Ce sont des nombres entiers. Problème : trouver une interprétation combinatoire des nombres  $T_n$ . Ou, si on préfère, puisque la fonction tangente est définie par l'équation différentielle  $y' = 1 + y^2$  (avec la condition initiale  $y(0) = 0$ ) : trouver une interprétation combinatoire de cette équation différentielle. Ce problème a été résolu au XIX<sup>e</sup> siècle, par Désiré André : il a montré que le nombre tangent  $T_n$  compte les *permutations alternantes* de  $\{1, 2, \dots, 2n+1\}$ . On considère les permutations comme des mots, on lit de gauche à droite ; prenons par exemple  $n = 1$  et la permutation (132) : 1 est plus petit que 3, donc ça monte, 3 est plus grand que 2, donc ça descend : il n'y a que deux permutations de  $\{1, 2, 3\}$  qui commencent par une montée et qui finissent par une descente, ce sont 132 et 231. Il y a celles qui font le contraire (une descente, puis une montée), mais on ne les compte pas car elles s'obtiennent par un retournement évident des deux précédentes ; et enfin il y a les deux permutations non alternantes 123 (tout monte) et 321 (tout descend). Donc

$T_1 = 2$ . On peut voir aussi directement que  $T_2 = 16$  : c'est le nombre de permutations alternantes qui commencent par monter ; il y en a 32 si on compte aussi celles qui commencent par descendre ; les autres permutations, comme 12354 ou 15423, ne sont pas alternantes, car il leur arrive de monter ou de descendre deux fois de suite. Comment André a-t-il trouvé cette interprétation ? Je pensais qu'il l'avait trouvée par hasard, mais pas du tout ! En préparant cette *Leçon*, je suis allé regarder plus attentivement l'article original d'André : il montre que les  $T_n$  vérifient une relation de récurrence, un peu comme les nombres de Catalan, mais avec des coefficients binomiaux devant, et au lieu d'arriver à une équation algébrique de degré 2, il aboutit à l'équation différentielle  $y' = 1 + y^2$ . Il signale que Catalan lui-même avait fait le lien entre cette équation différentielle et la relation de récurrence entre les  $T_n$ , et je pense que le problème d'André était de trouver une interprétation combinatoire de ces nombres  $T_n$  : je pense qu'il cherchait vraiment cette interprétation et qu'il n'est pas tombé dessus par hasard. Aujourd'hui, c'est beaucoup plus facile, on n'a pas besoin d'être si imaginaire, on a des méthodes automatiques qui nous conduisent directement des relations de récurrence entre les  $T_n$  (ou de l'équation différentielle, ce qui revient au même) aux permutations alternantes : on transforme l'équation différentielle  $y' = 1 + y^2$  (avec la condition  $y(0) = 0$ ) en l'équation intégrale :

$$y = t + \int_0^t y^2 dt,$$

on relève cette équation intégrale au niveau combinatoire, c'est-à-dire que l'on change  $y$  en  $Y$  ; donc maintenant on a une équation entre des objets combinatoires (on peut définir l'« intégrale »  $\int_0^T Y^2(T) dT$  comme un objet purement combinatoire) :

$$Y = T + \int_0^T Y^2(T) dT,$$

et cette équation combinatoire s'interprète de façon imagée : il s'agit d'objets étiquetés, je mets le sommet d'étiquette minimum à part, sur ce qui reste je fais une partition en deux sous-ensembles, et sur chaque morceau je mets deux objets de la structure  $Y$ , et voilà l'équation ima-

gée pour cette structure  $Y$  que je cherche :

$$Y = \bullet \quad \text{ou} \quad \begin{array}{c} \bullet \\ \text{min} \\ \swarrow \quad \searrow \\ Y \quad \quad Y \end{array}$$

J'itère cette équation et j'aboutis naturellement à :

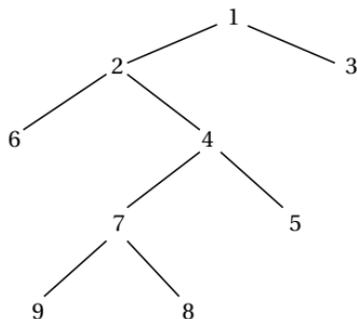


Fig. 8. Un arbre binaire croissant

J'arrive donc à des arbres binaires étiquetés par  $1, 2, \dots, n$  de telle façon que les étiquettes aillent en croissant quand je descends de la racine vers les feuilles. Et c'est automatique : avec Pierre Leroux, de Montréal, nous avons fait une théorie combinatoire de toutes les équations différentielles classiques d'un certain type, qui leur associe automatiquement des arbres colorés, croissants, valués (c'est-à-dire avec des coefficients) etc. et qui fournit une interprétation combinatoire de ces équations. Et comment retrouver ainsi les permutations alternantes ? Eh bien il suffit de projeter l'arbre : c'est une petite bijection locale, c'est une opération classique qu'en informatique on appelle *lire l'arbre en ordre symétrique* : de manière visuelle je *l'écrase*, et j'obtiens une belle permutation, dont vous pouvez vérifier par vous-mêmes qu'elle est alternante.

6 2 9 7 8 4 5 1 3

C'est cela, la combinatoire moderne : il y a des modèles généraux (pour les équations différentielles, pour les polynômes orthogonaux, pour les

fractions continues, etc.) et puis de temps en temps, pour telle ou telle identité particulière, on a besoin d'une petite bijection locale en plus; il existe tout un zoo, tout un jardin merveilleux de telles bijections. Au début il y en avait une — Knuth l'appelait la transformation fondamentale — puis d'autres sont apparues, alors on a parlé de la *première* transformation fondamentale, de la deuxième, de la troisième; puis il y a eu des dizaines, des centaines de bijections, maintenant c'est une jungle épouvantable, alors on s'efforce de mettre de l'ordre dans toutes ces bijections pour arriver à s'y retrouver.

Si vous prenez les nombres de permutations alternantes d'un nombre *pair* de lettres, vous obtenez les coefficients de *sécante*  $t$ , c'est-à-dire de  $\frac{1}{\cos t}$  :

$$\frac{1}{\cos t} = \sum_{n \geq 0} S_n \frac{t^{2n}}{(2n)!} = 1 + \frac{t^2}{2} + 5 \frac{t^4}{24} + \dots$$

où  $S_n$  (le  $n$ -ième *nombre sécant*) est le nombre de permutations alternantes de  $\{1, 2, \dots, 2n\}$ , pour  $n \geq 1$ , et  $S_0 = 1$ .

Maintenant, considérez les *fonctions elliptiques* de (Abel et) Jacobi :

$$\begin{aligned} \operatorname{sn}_k x &= x - (1+k^2) \frac{x^3}{3!} + (1+14k^2+k^4) \frac{x^5}{5!} - \dots \\ \operatorname{cn}_k x &= 1 - \frac{x^2}{2!} + (1+4k^2) \frac{x^4}{4!} - \dots \\ \operatorname{dn}_k x &= 1 - k^2 \frac{x^2}{2!} + (k^4+4k^2) \frac{x^4}{4!} - \dots \end{aligned} \tag{12}$$

(notez que  $\operatorname{sn}_0 = \sin$ ,  $\operatorname{cn}_0 = \cos$ ,  $\operatorname{dn}_0 = 1$ ), qui vérifient le système d'équations différentielles et les conditions initiales que voici :

$$\begin{aligned} \operatorname{sn}'_k x &= \operatorname{cn}_k x \operatorname{dn}_k x, & \operatorname{sn}_k 0 &= 0, \\ \operatorname{cn}'_k x &= -\operatorname{sn}_k x \operatorname{dn}_k x, & \operatorname{cn}_k 0 &= 1, \\ \operatorname{dn}'_k x &= -k^2 \operatorname{sn}_k x \operatorname{cn}_k x, & \operatorname{dn}_k 0 &= 1. \end{aligned}$$

Un problème, que Désiré André s'est sûrement posé aussi, puisqu'il a beaucoup travaillé sur les fonctions elliptiques (il a écrit un mémoire de plus de cent pages sur les fonctions elliptiques et leurs coefficients), est de trouver une *interprétation combinatoire* des coefficients des fonctions elliptiques. Hermite, dans une note aux Comptes

Rendus de l'Académie des Sciences, en 1863, a étudié ces coefficients. Il est curieux qu'après Hermite et André, pendant cent ans, il n'y ait plus rien eu. Ce sont Dominique Foata et Marcel-Paul Schützenberger qui ont ressuscité le problème, et puis j'ai donné la première interprétation combinatoire des coefficients des fonctions elliptiques [48] : ils comptent encore des permutations, mais ce ne sont plus les permutations alternantes, c'est une autre classe de permutations, que j'ai appelées *permutations de Jacobi*, et qui est plus naturelle pour le système d'équations différentielles des fonctions elliptiques. Je n'en dirai guère plus ici (je vous renvoie à [48] et à l'article pédagogique [49]), mais je vais quand même vous faire remarquer quelque chose. Regardez les polynômes qui interviennent dans le développement de  $sn_k$  :  $1, 1 + k^2, 1 + 14k^2 + k^4$ , etc. Le premier est  $1 = T_0$  ; les coefficients du deuxième sont  $1$  et  $1$  : leur somme est  $2 = T_1$  ; les coefficients du troisième sont  $1, 14$  et  $1$  : leur somme est  $16 = T_2$  ; et ainsi de suite : on retrouve les nombres tangents ! Maintenant, regardez les polynômes qui interviennent dans le développement de  $cn_k$  :  $1, 1, 1 + 4k^2, \dots$ . Le premier est  $1 = S_0$  ; le deuxième est  $1 = S_1$  ; les coefficients du troisième sont  $1$  et  $4$  : leur somme est  $5 = S_2$  ; et ainsi de suite : on retrouve les nombres sécants ! Il y a une explication analytique à cela, qui est que

$$\tan t + \frac{1}{\cos t} = -i sn_1(it) + cn_1(it).$$

Du point de vue combinatoire, la situation est la suivante : les permutations de Jacobi peuvent être réparties dans différentes sous-classes, et les coefficients des polynômes qui interviennent dans les développements de  $sn_k$  et de  $cn_k$  comptent les permutations de Jacobi dans ces sous-classes ; si on regroupe *toutes* les permutations de Jacobi de  $\{1, 2, \dots, 2n + 1\}$  ou de  $\{1, 2, \dots, 2n\}$  (on fait la réunion des sous-classes), leur nombre est la somme des coefficients du polynôme correspondant, et ce nombre est  $T_n$  ou  $S_n$  (respectivement) car il y a autant de permutations de Jacobi que de permutations alternantes (on connaît une bijection entre ces deux classes). En fait, il y a trois classes différentes de permutations comptées par tangente et sécante : il y a les alternantes, il y a celles de Jacobi, et il y a celles que Foata et Schützenberger ont appelé les *permutations d'André*. Cela fait trois interprétations combinatoires naturelles des nombres  $T_n, S_n$ .

Si, dans le triangle de Pascal ou celui des nombres de Catalan, vous alternez les sommations (au lieu de sommer toujours de gauche

à droite, vous sommez d'abord de gauche à droite, puis de droite à gauche, puis de gauche à droite, etc.), vous voyez se former, sur les bords du triangle, les nombres tangents et les nombres sécants. Arnold en a parlé dans sa *Leçon de Mathématiques d'Aujourd'hui* [5], et il l'appelait le *triangle d'Euler-Bernoulli*. Mon bon maître, Schützenberger, l'appelait le tableau de Kempner. En fait, si vous parsemez ce tableau de signes + et -, vous reconnaissez un tableau qui apparaissait déjà au XIX<sup>e</sup> siècle dans un article de Seidel où il y a des variantes de sommation qui conduisent aux nombres de Genocchi, définis par

$$x \tan \frac{x}{2} = \sum_{n \geq 1} G_n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$$

et vérifiant

$$G_n = \frac{n}{2^{2n-2}} T_{n-1}.$$

Ce sont des entiers. Ils sont liés aux célèbres nombres de Bernoulli<sup>(9)</sup>, par :

$$G_n = 2(2^{2n} - 1)B_n.$$

Il y a un théorème de Clausen et von Staudt en arithmétique qui dit que le nombre obtenu en remplaçant 2 par  $a$ ,

$$a(a^{2n} - 1)B_n,$$

est un entier : pour  $a = 2$  vous avez un bel entier qui est de Genocchi, et si vous le multipliez par  $2^{2n-2}$  vous obtenez  $n$  fois le nombre tangent  $T_{n-1}$ . Si je prends le nombre de permutations alternantes de  $\{1, 2, \dots, 2n-1\}$  et que je le multiplie par  $n$ , il n'est absolument pas évident de voir, sur les objets combinatoires (les arbres binaires croissants, avec une feuille pointée) que c'est divisible par  $2^{2n-2}$  ; il n'est pas difficile de voir que c'est divisible par  $2^{n-1}$ , avec des changements arbre gauche / arbre droit, mais par  $2^{2n-2}$  c'est beaucoup plus difficile. Donc, des identités faciles peuvent devenir très compliquées au niveau bijectif. Inversement, des choses qui sont pratiquement impossibles à faire analytiquement peuvent se faire au niveau bijectif.

Un exemple est celui de la conjecture dite «  $q$ -Dyson » : Dyson avait conjecturé que le terme constant d'un certain produit était égal à quelque chose de joli, et immédiatement, deux ou trois articles sont

---

<sup>9</sup>Définis par  $\frac{1}{e^z - 1} = \frac{1}{z} - \frac{1}{2} + \sum_{n \geq 1} (-1)^{n-1} B_n \frac{z^{2n-1}}{(2n)!}$ . (N.d.R.)

sortis où la conjecture était démontrée analytiquement ; mais ensuite, Andrews a fait un *q-analogue* de la conjecture de Dyson (sa conjecture fait intervenir un paramètre continu  $q$ , et on retrouve la conjecture de Dyson en faisant  $q \rightarrow 1$ ) : c'est « *q-Dyson* ». (Il y a beaucoup de problèmes où interviennent des *q-analogues* d'objets combinatoires : aujourd'hui on appelle cela la *combinatoire quantique*.) Cette nouvelle conjecture a résisté à tous les grands maîtres (Andrews, Askey, ...) : personne n'a pu trouver une preuve analytique ; alors Doron Zeilberger a repris la conjecture originale de Dyson, il a eu beaucoup de mal à trouver une preuve bijective, mais dès qu'il l'a eue, en mettant partout du poids  $q$  sa preuve passait au *q-analogue* : « *q-Dyson* » était démontrée sans nouvel effort !

### Le paradigme bijectif

Il y a comme un gros iceberg : la partie visible est faite de toutes les manipulations concrètes de dessins, d'objets, que l'on peut faire comprendre parfois à des enfants ; et la partie immergée, la partie profonde de l'iceberg, c'est la théorie des fonctions spéciales, les polynômes orthogonaux, les fonctions elliptiques, la représentation des groupes, les partitions d'entiers, les fractions continues, les approximants de Padé, les équations différentielles, les systèmes dynamiques, etc. Il y a plein de théories qui, petit à petit, se font « combinatoriser ». On reprend tous les théorèmes classiques, même les choses les plus évidentes, comme l'inversion d'une matrice (les cofacteurs divisés par le déterminant) : on veut des preuves bijectives de tout ! Des choses évidentes peuvent être très difficiles quand on les regarde sous le point de vue bijectif ; donc il faut faire cela en secret : parce que si vous dites à vos collègues que vous passez vos jours et vos nuits à essayer de démontrer que  $\sin^2 t + \cos^2 t = 1$  (c'est un exercice que j'ai donné à mes petits normaliens), vous allez passer pour un rigolo ! Bon, il ne faut le dire à personne ! Mais si vous vous entraînez à démontrer bijectivement des tas de théorèmes classiques, vous devenez expert en bijections, et alors quand un problème ouvert est devant vous, vous avez des possibilités supplémentaires : vous allez pouvoir utiliser non seulement la grosse artillerie mathématique, mais aussi vos bijections. C'est un peu comme l'escalade : les bijections, ce serait l'escalade libre — on refait toutes les maths classiques, sans piton, sans corde, sans rien : pieds nus, mains nues, on n'a aucun outil ; il faut pouvoir expliquer la bijection à un enfant. On s'efforce de refaire ainsi toutes les mathématiques

classiques, et ensuite, quand on est dans l'Himalaya, on a droit à tout.

Je vais vous donner un exemple qui m'est arrivé : j'étais de passage au MIT, dans le même bureau qu'un grand combinatoriste « calculateur » — Dennis Stanton — et on devait calculer la célèbre intégrale d'Askey, très compliquée, très difficile. On s'est associé ; il me donnait des identités, j'essayais une bijection, je lui suggérais des modifications : il y avait un dialogue constant entre les bijections et le calcul, et en un après-midi on a résolu le problème [26].

Nous sommes en plein âge d'or : c'est un vieux domaine, il y a deux mille ans il y avait Hipparque, etc. mais aujourd'hui le volcan est en pleine explosion, chaque année il y a une nouvelle revue de combinatoire qui sort !

Maintenant, je vais vous faire visiter la partie cachée de l'iceberg, c'est-à-dire la théorie. N'essayez pas (ou pas forcément) de tout comprendre, laissez-vous bercer par les images.

## Combinatoire algébrique

La *combinatoire algébrique* consiste à résoudre des problèmes algébriques par des méthodes combinatoires, et réciproquement. Voici quelques exemples.

### Représentations irréductibles des groupes et tableaux de Young standards

Une représentation (linéaire) d'un groupe  $G$  consiste à se donner un morphisme de groupes de  $G$  dans le groupe des matrices inversibles  $GL_m$  (ou des applications linéaires bijectives d'un espace vectoriel dans lui-même), disons :

$$G \xrightarrow{\varphi} GL_m(\mathbb{C}).$$

Il est très important (en physique autant qu'en mathématiques) de représenter un groupe abstrait par des transformations concrètes (des symétries d'un cube, des rotations, etc.). Ce que l'on appelle le *degré* de la représentation, c'est  $m$  : c'est la taille des matrices par lesquels vous représentez les éléments du groupe. Et quand on a deux représentations  $\varphi_1 : G \rightarrow GL_r(\mathbb{C})$ ,  $\varphi_2 : G \rightarrow GL_s(\mathbb{C})$  d'un groupe  $G$ , on peut définir la somme directe de ces représentations, de façon évidente : à  $g \in G$  on associe la matrice  $\varphi_1(g) \oplus \varphi_2(g) \in GL_{r+s}(\mathbb{C})$  formée des blocs diagonaux

$\varphi_1(g)$  et  $\varphi_2(g)$ . Une représentation est irréductible si on ne peut pas la décomposer de façon non triviale comme une somme directe de représentations. Toute représentation se décompose en une somme directe de représentations irréductibles — c'est un peu comme la décomposition des entiers en facteurs premiers :

$$n = p_1^{\alpha_1} \cdots p_k^{\alpha_k} \quad \text{factorisation en nombres premiers,}$$

$\varphi = \alpha_1 \varphi_1 \oplus \cdots \oplus \alpha_k \varphi_k$  décomposition en représentations irréductibles.

Dans le cas du groupe symétrique  $\mathfrak{S}_n$ , il y a autant de représentations irréductibles que de partitions de l'entier  $n$ . Les diagrammes de Ferrers sont en bijection avec les représentations irréductibles. Comment lire, sur ces diagrammes, le degré de la représentation ? La réponse a été donnée au début du  $xx^e$  siècle par le révérend père Alfred Young. Donnons d'abord une définition :

**Définition.** Un « tableau de Young » est un remplissage d'un diagramme de Ferrers avec les entiers  $1, 2, \dots, n$ , chaque entier apparaissant une fois, et une seule, de telle façon qu'il y ait croissance dans les lignes, de gauche à droite, et croissance dans les colonnes, de bas en haut.

7	12				
6	10				
3	5	9			
1	2	4	8	11	

Fig. 9. Un tableau de Young standard

La réponse de Young est alors la suivante. Soit une représentation irréductible ; prenons le diagramme de Ferrers associé. Eh bien le degré de la représentation est le nombre de tableaux de Young standards remplissant ce diagramme de Ferrers. On a transformé ainsi un problème algébrique (calculer le degré d'une représentation) en un problème combinatoire (calculer le nombre de tableaux de Young standards de forme donnée). Il s'agit maintenant de résoudre ce problème combinatoire. Percy MacMahon, le grand combinatoriste du début du  $xx^e$  siècle (et qui fut aussi lieutenant dans l'armée britannique des Indes) a donné une formule, assez compliquée, avec un gros déterminant.

Beaucoup plus tard, il s'est produit un petit miracle : on a trouvé une formule très simple. D'abord, une petite définition :

**Définition.** « L'équerre » d'une case dans le diagramme est l'ensemble des cases qui se trouvent au-dessus et des cases qui se trouvent à droite de la case donnée, ainsi que la case elle-même. Le nombre de cases que contient l'équerre s'appelle la longueur d'équerre de la case donnée.

**Exemple.**

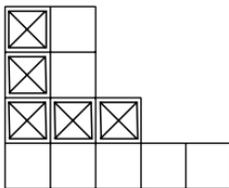


Fig. 10. Équerre d'une case

(Dans cet exemple, la longueur d'équerre est égale à 5.) Maintenant, inscrivez dans chaque case sa longueur d'équerre, et faites le produit pour toutes les cases :

**Théorème.** *Le produit de toutes les longueurs d'équerre divise  $n!$  et le quotient est le nombre de tableaux de Young standards.*

**Exemple.** Pour :

2	1			
3	2			
5	4	1		
8	7	4	2	1

Fig. 11. Longueurs d'équerres

il y a  $n = 12$  cases et le produit des longueurs d'équerre est 107520, donc il y a  $12!/107520 = 4455$  tableaux de Young standards. Et donc les représentations irréductibles de cette forme seront faites avec des

matrices  $4455 \times 4455$ . C'est une belle formule générale et simple. Il en existe des preuves bijectives, et même plusieurs : Doron Zeilberger, Christian Krattenthaler ont trouvé des bijections.

### Correspondance de Robinson-Schensted et jeu de taquin

Vous savez tous que l'ordre d'un groupe fini est égal à la somme des carrés des degrés des représentations irréductibles de ce groupe. En particulier, pour le groupe symétrique, on a donc cette formule :

$$n! = \sum_{\lambda} f_{\lambda}^2, \quad (13)$$

où l'on somme sur les partitions de  $n$  :  $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_k)$ ,  $\lambda_1 + \dots + \lambda_k = n$ ,  $\lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_k \geq 0$ , et où les  $f_{\lambda}$  sont les nombres de tableaux de Young standards. Par exemple, pour  $n = 4$ , il y a 24 permutations, cinq partitions ; pour chaque partition (chaque diagramme de Ferrers), calculez le nombre de tableaux de Young standards : vous trouvez en tout  $1 + 3 + 2 + 3 + 1 = 10$  tableaux de Young standards ; élevez ces nombres au carré et faites la somme,  $1 + 9 + 4 + 9 + 1 = 24$  : c'est bien l'ordre du groupe.

Il existe une très belle preuve bijective. Le premier membre de (13) compte les permutations ; le second membre compte les couples de tableaux de Young standards de même forme. Et il se trouve qu'il y a une bijection entre ces deux classes d'objets, c'est la fameuse *correspondance de Robinson-Schensted* : à une permutation  $\sigma$  de  $\{1, \dots, n\}$  on associe deux tableaux de Young standards de même forme, qu'on note  $P(\sigma)$  et  $Q(\sigma)$  et qu'on appelle le « P-symbole » et le « Q-symbole ». Cette bijection a commencé à apparaître en 1938, 1947, 1948 (Gilbert de B. Robinson), puis en 1961 (C. Schensted), ensuite Donald Knuth l'a généralisée (1970), et Marcel-Paul Schützenberger l'a énormément étudiée en 1963, 1971, 1976. On peut la présenter au moyen du *jeu de taquin* de Schützenberger [44]. Prenons une permutation  $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ . Par exemple prenons  $n = 4$  et la permutation 3421 (c'est-à-dire la permutation qui transforme le mot 1234 en 3421). On l'écrit en diagonale, comme ceci :

$$\begin{array}{cccc} & & & 3 \\ & & & 4 \\ & & & 2 \\ & & & 1 \end{array}$$

On considère cela comme un tableau triangulaire à 4 colonnes de hauteurs décroissantes, et avec des cases vides. On le transforme en



## Fonctions de Schur et algèbre plaxique

J'ai parlé des tableaux de Young standards. Voici maintenant ce que l'on appelle les *tableaux de Young généralisés* (ou tout simplement *tableaux de Young*) :

**Définition.** Un tableau de Young (généralisé) est comme un tableau de Young standard, sauf que l'on peut répéter les entiers; mais il y a une contrainte : il faut qu'il y ait croissance au sens large dans les lignes, et croissance au sens strict dans les colonnes.

Il existe une très belle base de l'espace des fonctions symétriques, qui est formée par ce que l'on appelle les *fonctions de Schur* : c'est la base royale, c'est celle qu'il faut prendre si on veut faire de beaux calculs avec les fonctions symétriques. Il y a une définition analytique de ces *fonctions de Schur* (avec des déterminants), mais voici leur définition *combinatoire*, la définition pour les enfants.

**Définition.** Soit  $\lambda$  un diagramme de Ferrers. Prenez un tableau de Young généralisé de forme  $\lambda$ . Associez-lui un monôme (son « poids ») en remplaçant chaque entier  $i$  du tableau par  $x_i$  et en faisant le produit :

$$V(T) = x_1^3 x_2^3 x_3^2 x_5^2 x_8^2$$

Fig. 12. Tableau de Young (généralisé) avec son poids

Faites la somme sur tous les tableaux de Young de même forme  $\lambda$  : vous obtenez un polynôme  $s_\lambda(x_1, \dots, x_n)$  : c'est la fonction de Schur d'indice  $\lambda$ .

Il n'est pas évident sur cette définition que c'est une fonction symétrique : il faut faire quelques manipulations pour le démontrer, mais c'est vrai. Ces fonctions ont été introduites par Carl Jacobi (1841), Issai Schur (1901), Dudley E. Littlewood et Archibald R. Richardson (1934).

Elles jouent un rôle très important dans divers domaines. Il y a une formule pour calculer le produit de deux fonctions de Schur : c'est une combinaison de fonctions de Schur,

$$s_\lambda s_\mu = \sum_{\nu} g_{\lambda\mu\nu} s_\nu \quad (14)$$

et les coefficients  $g_{\lambda\mu\nu}$  sont donnés par une règle assez obscure, qui a été devinée par Littlewood et Richardson — mais ils n'ont pas pu la démontrer. Marcel-Paul Schützenberger a trouvé une explication rigoureuse [44] grâce à son *jeu de taquin*. Prenez deux tableaux de Young généralisés, par exemple :

$$\begin{array}{c} 4 \\ 3 \\ 1 \ 2 \end{array} \quad \text{et} \quad \begin{array}{c} 3 \\ 2 \ 2 \end{array}$$

Disposez-les en diagonale, comme ceci :

$$\begin{array}{c} 4 \\ 3 \\ 1 \ 2 \\ \phantom{1 \ 2} \ 3 \\ \phantom{1 \ 2} \ 2 \ 2 \end{array}$$

et appliquez le *jeu de taquin* : vous poussez les numéros vers la gauche ou vers le bas, avec la même contrainte que tout à l'heure, à savoir que s'il y a des numéros juste au-dessus et juste à droite d'une case libre, c'est le plus petit des deux qui tombe dans la case libre ; en cas d'égalité vous faites tomber celui du dessus. Finalement, vous obtenez un tableau de Young, qui dans notre exemple est :

$$\begin{array}{c} 4 \\ 3 \ 3 \\ 1 \ 2 \ 2 \ 2 \end{array}$$

Là encore, le tableau de Young obtenu à la fin ne dépend pas de l'ordre dans lequel vous avez poussé les numéros. On l'appelle le produit *plaxique* (ou *plactique*) des deux tableaux de Young initiaux, parce que sa construction fait penser un peu à la tectonique des plaques ; muni de cette multiplication, l'ensemble des tableaux de Young devient le *monoïde plaxique* (introduit dans [44] et ainsi dénommé dans [34]). On peut faire des sommes formelles de tableaux de Young, avec des

coefficients dans  $\mathbb{Z}$ , et le monoïde plaxique devient alors une  $\mathbb{Z}$ -algèbre. Pour tout diagramme de Ferrers  $\lambda$  on note  $S_\lambda$  la somme des tableaux de Young de forme  $\lambda$ . En remplaçant dans  $S_\lambda$  chaque tableau par le monôme qui lui est associé de la façon que j'ai expliquée tout à l'heure (figure 12), on obtient la fonction de Schur  $s_\lambda$ .

Maintenant, soient  $\lambda, \mu, \nu$  des diagrammes de Ferrers, et soit  $R$  un tableau de Young de forme  $\nu$ . Le nombre de couples de tableaux de Young  $(T, S)$  de forme  $(\lambda, \mu)$  et de produit (plaxique)  $R$  ne dépend que de  $\lambda, \mu, \nu$  (il ne dépend pas du choix de  $R$ , pour une forme  $\nu$  donnée) : notons-le  $g_{\lambda\mu\nu}$ . On a donc :  $S_\lambda S_\mu = \sum_\nu g_{\lambda\mu\nu} S_\nu$ , et en passant aux poids on obtient la relation correspondante sur les fonctions de Schur, c'est-à-dire la formule (14). Ce n'est pas tout : un *théorème de symétrie* de Schützenberger permet de donner de  $g_{\lambda\mu\nu}$  une autre interprétation combinatoire que celle que l'on vient d'obtenir, et on retrouve alors la règle classique de Littlewood-Richardson!

Si vous regardez comment on a construit le P-symbole et le Q-symbole par le jeu de taquin, vous voyez que c'était déjà le monoïde plaxique qui intervenait. Le monoïde plaxique explique à la fois la correspondance de Robinson-Schensted et la règle de Littlewood-Richardson qui est ainsi démontrée. C'est une structure riche, sous-jacente à beaucoup de choses. Vous voyez, on a fait un tour de spirale : on est parti de notions algébriques (représentations irréductibles des groupes, fonctions de Schur), on est passé à la combinatoire (tableaux de Young, correspondance de Robinson-Schensted), et puis nous voici amenés à une autre structure algébrique, qui est le monoïde plaxique — mais c'est à un autre niveau algébrique. Peut-être que lorsqu'on aura suffisamment d'identités dans le monoïde plaxique, on pourra les bijectiviser ; et puis on trouvera une autre structure algébrique qui expliquera les nouvelles bijections très compliquées que l'on aura inventées, etc. On joue, comme ça, à tourner entre l'algèbre et la combinatoire, et également la théorie des nombres. D'ailleurs MacMahon avait dit au début du 20-ième siècle que la combinatoire devait occuper le terrain entre l'algèbre et la théorie des nombres. Au Conseil National des Universités (CNU), au début, quand il n'y avait pas de combinatoire, il y avait une section intitulée *algèbre, théorie des nombres et logique* ; et maintenant c'est *algèbre, combinatoire et théorie des nombres* : ils ont écouté MacMahon — ils ont mis la combinatoire entre l'algèbre et la théorie des nombres !

## Les déterminants et les chemins qui ne se coupent pas

Il y a un beau théorème qui interprète les déterminants : *dans beaucoup de cas, en combinatoire, un déterminant compte des configurations de chemins qui ne se coupent pas.*

C'est un résultat qui est souvent appelé « lemme de Lindström-Gessel-Viennot ». Lindström l'avait écrit en termes de matroïdes en 1973, il fut réécrit et popularisé avec l'article [22] en 1985. Des cas particuliers apparaissent sous différentes formes, à la même époque, chez les physiciens et les chimistes théoriciens. On se reportera au livre *Raisonnements divins* [2] où un chapitre lui est consacré.

Prenez des chemins, qui vont des points  $A_1, A_2, \dots, A_n$  aux points  $B_1, B_2, \dots, B_n$ , affectez un poids à chacun d'eux, et prenez la matrice  $M = (m_{ij})$ , où  $m_{ij}$  est la somme des poids des chemins qui vont de  $A_i$  à  $B_j$  :

$$m_{ij} = \sum_{\omega: A_i \rightsquigarrow B_j} v(\omega).$$

D'après la définition classique, le déterminant de  $M$  va être la somme des poids de toutes ces configurations, avec des signes + ou - :

$$\det M = \sum_{\substack{\sigma; \omega_1, \dots, \omega_n \\ \omega_i: A_i \rightsquigarrow B_{\sigma(i)}}} (-1)^{\text{Inv}\sigma} v(\omega_1) \cdots v(\omega_n)$$

où  $\text{Inv}\sigma$  est le nombre de transpositions (inversions) dans  $\sigma$ . Sous certaines conditions, il va y avoir des compensations drastiques. Par exemple, si vous échangez deux des chemins, le signe va changer, mais les poids vont rester les mêmes, donc le terme après échange va compenser celui d'avant. Il va y avoir beaucoup de compensations comme celle-là et, en général, si les conditions adéquates sont remplies, ce qui reste, ce sont les configurations de chemins qui ne se coupent pas :

### Lemme (Lindström-Gessel-Viennot)

$$\det M = \sum'_{\substack{\omega_1, \dots, \omega_n \\ \omega_i: A_i \rightsquigarrow B_i}} v(\omega_1) \cdots v(\omega_n)$$

où le prime indique que la somme porte sur les chemins qui ne se coupent pas. En particulier, si tous les poids sont 0 ou 1, le déterminant compte les chemins qui ne se coupent pas.

**Première application : matrice de Fermat.** Avec le lemme précédent, on peut calculer combinatoirement des déterminants. Voici un

exemple. Reprenons le triangle de Pascal, mais sous une forme un peu différente : les rangées et les colonnes sont numérotées par  $0, 1, 2, \dots$  et à l'intersection de la rangée  $i$  et de la colonne  $j$  on met le nombre  $m_{ij} = \binom{i+j}{i}$  (on appelle parfois cela la « matrice de Fermat »). Le terme  $m_{ij}$  est la somme des poids des chemins qui vont de  $i$  à  $j$ , avec le poids 1 si je fais un pas vers l'est ou vers le nord, 0 dans les autres cas. D'après le lemme, le déterminant pour les  $n$  premières lignes et colonnes est égal au nombre de configurations de chemins qui ne se coupent pas : on voit tout de suite sur le dessin ci-dessous qu'il n'y en a qu'une, donc le déterminant vaut 1.

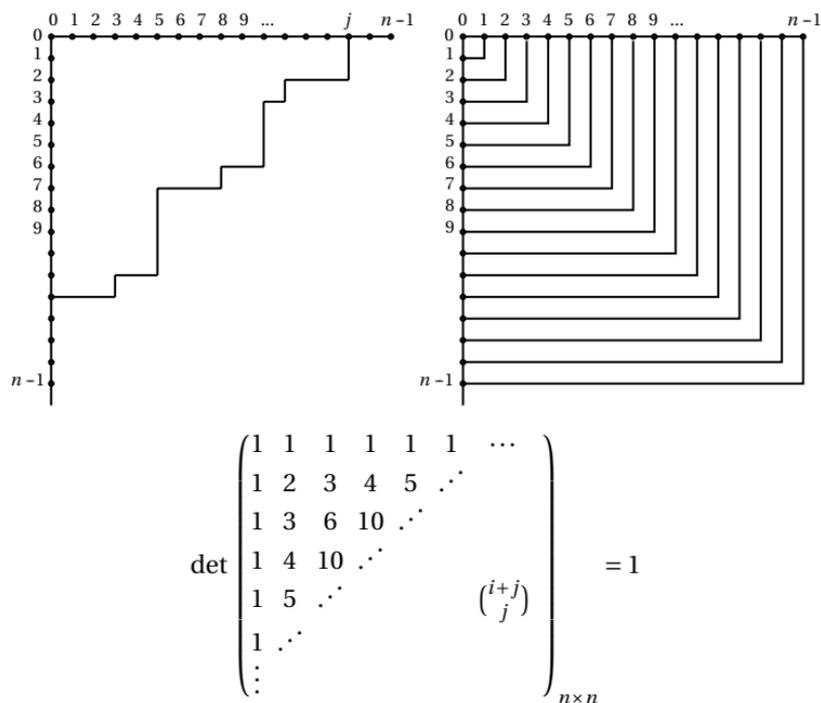


Fig. 13. Chemins et déterminant pour la matrice de Fermat

**Deuxième application : déterminants binomiaux.** Reprenons encore le triangle de Pascal, et complétons-le en carré en mettant des 0 au-dessus de la diagonale. On appelle *déterminant binomial* d'ordre  $n$  un

mineur  $n \times n$  de ce carré. Ces déterminants interviennent en géométrie algébrique, comme coefficients dans le calcul des classes de Chern des produits tensoriels de fibrés.

Voici le déterminant binomial que l'on obtient en sélectionnant les lignes 2, 3, 5, 7 et les colonnes 1, 2, 4, 5 du triangle de Pascal (cf. p. 1, les lignes et les colonnes étant numérotées à partir de 0) :

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 0 & 0 \\ 5 & 10 & 5 & 1 \\ 7 & 21 & 35 & 21 \end{vmatrix}$$

Je vais vous donner une interprétation combinatoire de ces mineurs. On commence par remarquer que si on note respectivement  $a_i, b_j$  les numéros des lignes et des colonnes sélectionnées, le terme  $m_{ij}$  du mineur ( $m_{ij} = \binom{a_i}{b_j}$ ) est simplement le nombre de chemins qui vont du point  $A_i$  (sur le bord vertical, de coordonnée  $a_i$ ) au point  $B_j$  (sur la diagonale, de coordonnées  $(b_j, b_j)$ ), en ne faisant que des pas vers l'est ou vers le nord :

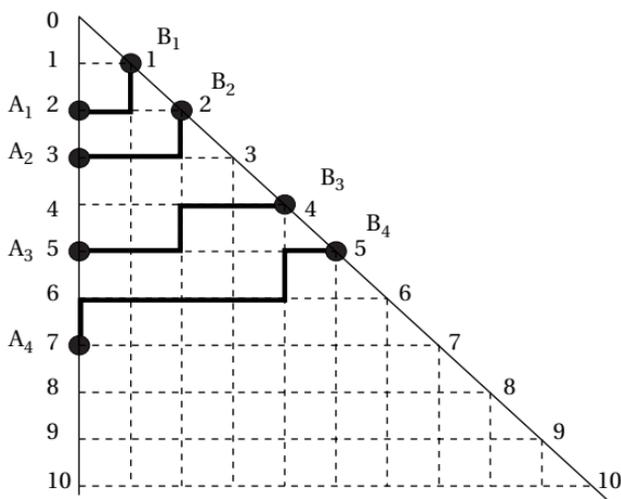


Fig. 14. Une configuration de chemins pour le déterminant binomial ci-dessus

Appliquons le lemme : *un déterminant binomial compte le nombre de configurations de chemins qui ne se coupent pas, partant des points  $A_i$  et arrivant aux points  $B_j$* . Par exemple, pour la matrice binomiale complète de taille  $n$  (où l'on prend toutes les lignes et toutes les colonnes de 0 à  $n - 1$ ), il n'y a visiblement qu'une configuration (chemins horizontaux), comme il se doit puisque le déterminant vaut évidemment 1 (la matrice est triangulaire, avec des 1 sur la diagonale).

Pour le mineur de l'exemple ci-dessus, le nombre de configurations ne saute pas aux yeux, mais le mineur lui-même est facile à calculer, et on trouve 210 : la configuration ci-dessus est l'une des 210 possibles ! Vous voyez que le lemme peut être utilisé dans les deux sens : si les configurations de chemins qui ne se coupent pas sont facilement visibles (cas de la matrice de Fermat), on en déduit le déterminant sans calcul ; et si au contraire c'est le calcul du déterminant qui est facile, on en déduit le nombre de configurations de chemins qui ne se coupent pas. Et on a aussi un corollaire qui n'avait rien d'évident *a priori* :

**Corollaire.** *Puisqu'un déterminant binomial est un nombre de configurations, il est positif ou nul. Et il est strictement positif ssi  $b_i \leq a_i$  pour tout  $i$ .*

On peut se demander combien il y a de mineurs non nuls dans la matrice formée par les  $n$  premières lignes et colonnes du triangle de Pascal. Eh bien, en comptant le mineur vide, *leur nombre est le nombre de Catalan  $C_{n+1}$* . Vous pouvez vérifier : pour  $n = 1$  il y en a 2, pour  $n = 2$  il y en a 5, pour  $n = 3$  il y en a 14, etc. Et c'est facile à démontrer, avec l'interprétation en termes de configurations de chemins qui ne se coupent pas. Autre curiosité : si vous écrivez les rangées du triangle de Pascal sous la forme de colonnes suspendues à la diagonale,

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & & & & & 1 \\
 & & & & & & 1 \\
 & & & & & & 1 & 1 \\
 & & & & & & 2 & 1 \\
 & & & & & & 1 & 3 & 1 \\
 & & & & & & & 3 & 4 & \ddots \\
 & & & & & & & 1 & 6 \\
 & & & & & & & & 4 \\
 & & & & & & & & & 1
 \end{array}$$

alors la somme de tous les mineurs non nuls de ce déterminant  $n \times n$  est

égale au nombre de matrices à signes alternants !

**Troisième application : inversion de matrices.** La formule d'inversion des matrices peut être visualisée au moyen des chemins qui ne se coupent pas. Cherchons par exemple la composante  $(i, j)$  (ligne  $i$ , colonne  $j$ ) de l'inverse de la matrice de Fermat ( $0 \leq i, j \leq n-1$ ). Il y a une seule configuration de chemins qui ne se coupent pas (figure 13). J'enlève le point de départ  $n^0 j$  (sur le bord vertical) et le point d'arrivée  $n^0 i$  (sur le bord horizontal). J'ai donc maintenant un point de départ en moins et un point d'arrivée en moins. Je compte combien il y a désormais de configurations de chemins qui ne se coupent pas, je multiplie ce nombre par  $(-1)^{i+j}$  : j'obtiens le coefficient  $(i, j)$  de la matrice inverse.

Faisons l'exercice avec  $n = 3$ . Pour  $i = j = 0$ , il reste les points de départ  $n^{0s} 1$  et  $2$  (sur le bord vertical), et les points d'arrivée  $n^{0s} 1$  et  $2$  (sur le bord horizontal), et on voit qu'il y a 3 configurations de chemins qui ne se coupent pas : donc la composante  $i = j = 0$  de la matrice inverse est 3. Pour  $i = 1, j = 2$ , on a les points de départ  $n^{0s} 0$  et  $1$  et les points d'arrivée  $n^{0s} 0$  et  $2$ , il y a un chemin qui est réduit au point  $(0, 0)$ , et il y a 2 façons de joindre le point de départ  $n^0 1$  au point d'arrivée  $n^0 2$  par des pas *nord* et *est* sans passer par  $(0, 0)$  : donc la composante  $i = 1, j = 2$  de la matrice inverse est  $-2$ . Etc. On obtient de cette façon :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 6 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -3 & 1 \\ -3 & 5 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

simplement en regardant des chemins.

On peut aussi visualiser les choses de la façon suivante : dans la configuration initiale, je retire le point de départ  $n^0 j$  et le point d'arrivée  $n^0 i$ , et je « déboutonne » les chemins ; les « trous » peuvent alors se « propager » dans la « toile d'araignée » selon des chemins que l'on appelle les *chemins duaux*, visualisés sur la figure 15 : ces chemins partent des points  $(0, j)$  et  $(i, 0)$ , et ils se rencontrent en un point  $(k, k)$  de la diagonale ; leur dénombrement est immédiat et en multipliant par  $(-1)^{i+j}$  on obtient que le coefficient  $(i, j)$  de l'inverse de la matrice

de Fermat est  $(-1)^{i+j} \sum_k \binom{k}{i} \binom{k}{j}$ . On retrouve ainsi un résultat classique (voir [12]).

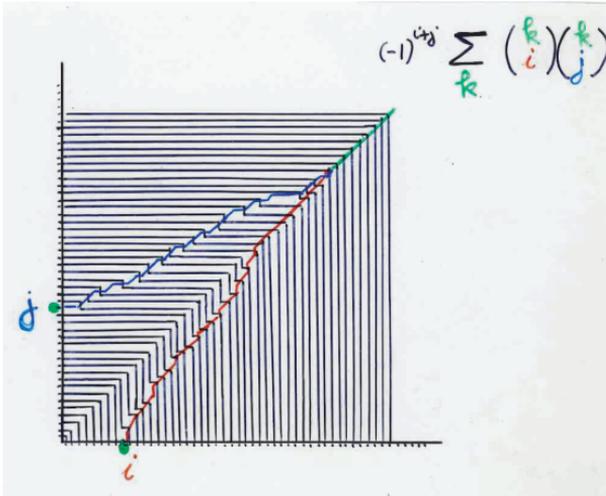


Fig. 15. Inversion de la matrice de Fermat

Cette vision combinatoire s'étend à la *dualité de Jacobi* entre les mineurs d'une matrice et ceux de la matrice inverse. Rappelons que la dualité de Jacobi dit la chose suivante. Soient :  $M$  une matrice inversible dont les lignes et colonnes sont numérotées de  $0$  à  $n-1$  ;  $A, B$  deux parties à  $k$  éléments de  $\{0, \dots, n-1\}$ , et  $\bar{A}, \bar{B}$  leurs complémentaires ;  $M[A | B]$  le mineur dont les numéros des lignes (resp. des colonnes) sont dans  $A$  (resp. dans  $B$ ) ;  $N$  la matrice obtenue en multipliant dans  $M^{-1}$  le coefficient  $(i, j)$  par  $(-1)^{i+j}$ . Alors  $M[A | B] = (\det M) N[\bar{B} | \bar{A}]$ .

Si  $M$  est la matrice binomiale, on a  $\det M = 1$  et  $N = M$ , et dans ce cas la dualité de Jacobi prend la forme  $M[A | B] = M[\bar{B} | \bar{A}]$ , dont on peut donner une preuve bijective très simple (voir [22]).

**Promeneurs méchants...** Les chemins qui ne se coupent pas se rencontrent dans beaucoup de contextes. Par exemple, il y a un article de Michael E. Fisher de 1984 qui est connu sous le sigle *WWW* (*Walks, Walls, Wetting and melting*) : c'est le texte de la conférence faite par Fisher quand il a reçu la médaille Boltzmann (de physique statistique) en 1983. Il a introduit les « promeneurs méchants » (*vicious walkers*) comme modèle théorique pour la physique des transitions de phase

liées au mouillage. Imaginez que vous êtes dans une pièce, vous regardez la vitre, dehors il fait froid, à l'intérieur il fait chaud, cela fait de la condensation, il y a plein de gouttelettes sur la vitre : ceci est un exemple de phénomène de transition de phase « mouillée ». Dans le modèle des promeneurs méchants à une dimension, il y a plein de promeneurs qui se baladent sur une droite, et ils sont méchants en ce sens que quand ils arrivent au même point ils s'entre-tuent. Si vous préférez, ce sont des particules qui bougent sur une droite et qui n'ont pas le droit de se croiser. Si vous déployez leur mouvement dans le temps, vous avez des chemins qui ne se coupent pas. Dans l'article de Fisher, il y a plein de déterminants. Et en fait c'est la même théorie que la théorie combinatoire dont je viens de parler (mais les deux communautés, celle des combinatoristes et celle des physiciens, s'ignoraient mutuellement : chacune développait ses idées dans son coin). Ces déterminants sont assez compliqués à calculer. C'est un modèle discret ; le modèle continu de ces promeneurs méchants avait été fait, bien avant, par Pierre-Gilles de Gennes (1968), avec le mouvement brownien et des opérateurs de la mécanique quantique. De Gennes avait résolu le modèle continu, mais le modèle discret est beaucoup plus difficile. Et à l'heure actuelle on travaille encore combinatoirement sur des modèles analogues.

On retrouve aussi des idées de cette théorie combinatoire des déterminants, sous une forme probabiliste, chez Karlin et McGregor ([28, 29], 1959), qui étudiaient des populations qui croissent ou décroissent d'une unité : dans ce cas, les poids sont des probabilités.

Dans la théorie combinatoire actuelle, nous travaillons avec des variables formelles en guise de poids, etc. Ensuite chacun peut leur donner l'interprétation qu'il veut : les probabilistes mettront des probabilités, les analystes mettront des nombres réels ou complexes ; ceux qui font du calcul infinitésimal prendront des  $\varepsilon$  ; pour ceux qui font des  $q$ -analogues ce sera  $q_1, q_2, q_3, \dots$ . Mais pour obtenir des résultats généraux, mieux vaut rester au niveau des variables formelles.

## Polynôme de Jones

On change de sujet, en apparence ! En fait, tout est lié dans ce que je vous raconte : on passe de la topologie à l'algèbre, puis à la combinatoire...

Un nœud, c'est une immersion  $K : S^1 \rightarrow \mathbb{R}^3$  ( $K$  comme *knot* qui est

le mot anglais pour *nœud*). Au début du  $xx^e$  siècle, les mathématiciens voulaient trouver des invariants des nœuds. James Alexander (en 1928) a trouvé un polynôme associé à un nœud, qui reste invariant quand on déforme le nœud sans le casser. À l'époque, c'était considéré comme de la topologie : on voyait les choses en termes du groupe fondamental du complémentaire du nœud dans  $\mathbb{R}^3$ . Maintenant, la théorie des nœuds est devenue bien autre chose que de la topologie !

Aux nœuds sont associées les tresses. L'avantage des tresses, c'est que l'on peut en faire le produit, et on a une structure de groupe. Voici une tresse du groupe  $B_n$  (tresses à  $n$  brins), avec  $n = 6$  :

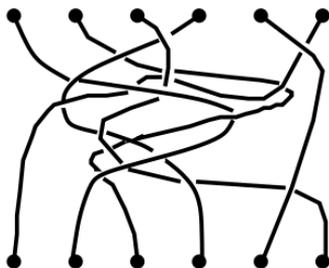
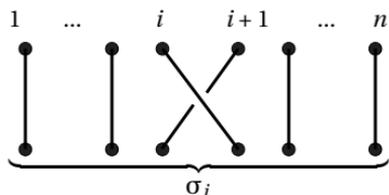


Fig. 16. Une tresse

Vous avez des clous en haut et en bas ; il y a  $n$  fils qui pendent, attachés par ces clous, et emmêlés les uns aux autres : on peut les bouger, mais on n'a pas le droit de les casser. Le produit de deux tresses est défini comme suit : vous placez la seconde tresse sous la première ; vous enlevez les clous du bas de la première tresse et ceux du haut de la seconde, et vous raccordez les brins : la nouvelle tresse que vous obtenez est, par définition, le produit des deux précédentes. Le groupe des tresses peut être défini de façon abstraite par générateurs et relations :



$$\sigma_i \sigma_j = \sigma_i \sigma_j \text{ pour } |i - j| \geq 2$$

$$\sigma_i \sigma_{i+1} \sigma_i = \sigma_{i+1} \sigma_i \sigma_{i+1}$$

Fig. 17. Générateurs et relations pour le groupe de tresses  $B_n$

Le lien entre les nœuds et les tresses est le suivant. En refermant une tresse sur elle-même, vous obtenez ce que l'on appelle un *entrelacs*, c'est-à-dire un nœud ou un ensemble de nœuds emmêlés les uns aux autres. Réciproquement, Alexander a montré que tout entrelacs (et, en particulier, tout nœud) provient ainsi d'une tresse (mais il n'y a pas unicité de cette tresse).

Longtemps après Alexander, en 1985, Vaughan Jones a trouvé un nouveau polynôme invariant pour les nœuds. C'était une grande surprise, d'autant qu'il avait obtenu son nouvel invariant par une construction algébrique (et non topologique), qui passait par divers objets, dont l'algèbre de Hecke  $H_n(q)$  caractérisée par les relations :

$$\begin{aligned} g_i^2 &= (q-1)g_i + q & (1 \leq i \leq n-1) \\ g_i g_j &= g_j g_i & (|j-i| \geq 2, \quad 1 \leq i, j \leq n-1) \\ g_i g_{i+1} g_i &= g_{i+1} g_i g_{i+1} & (1 \leq i \leq n-2). \end{aligned} \quad (15)$$

Vous voyez, les deuxième et troisième relations sont les mêmes que pour les tresses; et si, dans la première relation, vous faites  $q = 1$ , vous retrouvez l'algèbre du groupe symétrique (c'est-à-dire les permutations, avec  $g_i =$  la transposition  $(i, i+1)$ ). L'algèbre du groupe symétrique a pour dimension  $n!$ ; l'algèbre de Hecke également, et les permutations constituent une base de l'algèbre de Hecke. On dit que l'algèbre de Hecke est une  $q$ -déformation de l'algèbre du groupe symétrique.

Maintenant, si je prends le quotient de l'algèbre de Hecke par l'idéal  $I$  engendré par les relations

$$g_i g_{i+1} g_i + g_i g_{i+1} + g_{i+1} g_i + g_i + g_{i+1} + 1 = 0 \quad (1 \leq i \leq n-2),$$

j'obtiens une autre algèbre,

$$A_n(q) = H_n(q)/I,$$

qui s'appelle l'algèbre de Temperley-Lieb : elle a été introduite par Neville Temperley et Elliott Lieb au début des années 1970, pour étudier un modèle de physique statistique (le *modèle de Potts*), et puis elle a été retrouvée dix ans plus tard par Vaughan Jones dans la théorie des algèbres de von Neumann. Cette algèbre peut se définir aussi par les

générateurs 1 et  $e_1, \dots, e_{n-1}$  et les relations :

$$\begin{aligned} e_i^2 &= e_i & (1 \leq i \leq n-1) \\ e_i e_j &= e_j e_i & (|j-i| \geq 2, \quad 1 \leq i, j \leq n-1) \\ e_i e_{i\pm 1} e_i &= \tau e_i & (1 \leq i, i \pm 1 \leq n-1), \end{aligned} \quad (16)$$

où  $\tau = q/(1+q)^2$  (prendre  $e_i = (1+q)^{-1}(g_i + 1) \bmod I$ ). Elle a pour dimension le nombre de Catalan  $C_n$  (il y a une bijection entre une base de monômes et les chemins de Dyck) : on ne peut pas échapper aux nombres de Catalan !

Jones a défini une *trace* sur l'algèbre  $A_n(q)$ , c'est-à-dire une forme linéaire telle que  $\text{tr}(uv) = \text{tr}(vu)$  pour tous  $u, v \in A_n(q)$ , et la construction de l'invariant de Jones est alors la suivante :

$$\text{Nœuds} \longrightarrow B_n \text{ (tresses)} \longrightarrow H_n(q) \text{ (Hecke)} \longrightarrow A_n(q) = H_n(q)/I \longrightarrow \text{trace.}$$

Vous prenez un nœud (ou un entrelacs) et vous le considérez comme la fermeture d'une tresse. (Il y a toujours plusieurs façons de le faire, mais tous les choix vont conduire au même résultat.) Ensuite, vous envoyez les générateurs du groupe des tresses sur les générateurs de l'algèbre de Hecke  $H_n(q)$  (vous remplacez  $\sigma_i$  par  $g_i$ ). Puis vous quotientez pour retomber sur l'algèbre de Temperley-Lieb  $A_n(q)$ , et enfin vous prenez la trace. C'est cette dernière étape (prendre la trace) qui permet d'éliminer l'arbitraire initial (quand vous aviez considéré le nœud ou l'entrelacs comme la fermeture d'une tresse) : tous les choix vont donner la même trace. Si on passe d'un entrelacs à un autre par une déformation continue, leurs images dans  $A_n(q)$  se correspondent par des transformations qui laissent la trace invariante. En normalisant convenablement la trace, on s'arrange pour que le nœud trivial soit envoyé sur 1. L'invariant de Jones dépend de  $q$ , bien sûr : en fait, c'est un polynôme en  $q^{1/2}, q^{-1/2}$ .

Cette construction purement algébrique provient de la théorie des algèbres de von Neumann et des travaux d'Alain Connes. Tout cela est expliqué dans le livre de Goodman, de la Harpe et Jones [23]. Mais il y a 30% de la construction qui est purement combinatoire. L'algèbre de Temperley-Lieb joue un rôle vraiment important, dans lequel interviennent des chemins de Dyck, comptés par les nombres de Catalan, et un tas de choses de combinatoire classique. Et aujourd'hui, on a complètement combinatorisé la construction. Les invariants des nœuds ont commencé dans la topologie, puis c'est devenu de l'algèbre,

et maintenant c'est de la combinatoire. On a besoin des fonctions de Schur pour l'algèbre de Hecke, et en prenant la théorie combinatoire des représentations, on arrive à calculer les polynômes de Jones beaucoup plus rapidement — cent fois plus vite ! Quand Sossinsky<sup>(11)</sup> est venu au LaBRI<sup>(12)</sup>, il est arrivé topologue, et quand il est reparti, au bout de six mois, il était « combinatorisé » !

### Différences divisées, polynômes de Schubert, Fomin-Kirillov

Le calcul des différences divisées est dû à Newton. *Newton n'a pas été compris*. Je suis allé en Chine avec Alain Lascoux, il a fait là-bas un cours intensif de dix jours sur le calcul des différences divisées, et grâce à lui j'ai enfin compris Newton !

L'opérateur de différence divisée  $\partial_i$  ( $1 \leq i \leq n-1$ ) est défini par :

$$\begin{aligned} \partial_i f(x_1, \dots, x_i, x_{i+1}, \dots, x_n) \\ = \frac{f(x_1, \dots, x_i, x_{i+1}, \dots, x_n) - f(x_1, \dots, x_{i+1}, x_i, \dots, x_n)}{x_i - x_{i+1}}. \end{aligned}$$

Il transforme un polynôme de degré  $m$  en un polynôme de degré  $m-1$  symétrique en  $(x_i, x_{i+1})$ .

Les opérateurs  $\partial_i$  ( $1 \leq i \leq n-1$ ) constituent une algèbre  $\mathcal{D}_n$  qu'outre-Atlantique on appelle *nilCoxeter algebra*; elle est définie par les mêmes relations que l'algèbre des tresses, sauf que les générateurs sont nilpotents au lieu d'être des involutions :

$$\begin{aligned} \partial_i^2 &= 0 & (1 \leq i \leq n-1) \\ \partial_i \partial_j &= \partial_j \partial_i & (|j-i| \geq 2, \quad 1 \leq i, j \leq n-1) \\ \partial_i \partial_{i+1} \partial_i &= \partial_{i+1} \partial_i \partial_{i+1} & (1 \leq i \leq n-2). \end{aligned} \quad (17)$$

À toute permutation  $\sigma$  de  $x_1, \dots, x_n$  on peut associer un opérateur  $\partial_\sigma$ , de la façon suivante : si  $\sigma$  est la transposition  $\tau_i = (x_i x_{i+1})$ , on prend  $\partial_\sigma = \partial_i$  ; et pour une permutation  $\sigma$  quelconque, on la décompose en transpositions de la forme  $\tau_i : \sigma = \tau_{i_1} \cdots \tau_{i_k}$ , et on pose

$$\partial_\sigma = \partial_{i_1} \cdots \partial_{i_k}$$

<sup>11</sup>Alexei Sossinsky, éminent spécialiste de la théorie des nœuds, professeur à l'Université indépendante de Moscou. Auteur du livre de vulgarisation *Noeuds, Genèse d'une théorie mathématique*, éditions du Seuil, Paris, 1999. (N.d.R.)

<sup>12</sup>Laboratoire Bordelais de Recherche en Informatique, à l'université Bordeaux 1. (N.d.R.)

Les relations entre les  $\partial_i$  (*nilCoxeter*) permettent de s'assurer que la définition est univoque. Lascoux et Schützenberger définissent alors le *polynôme de Schubert*  $\mathfrak{S}_\sigma$  par :

$$\mathfrak{S}_\sigma = \partial_{\omega\sigma} (x_1^{n-1} x_2^{n-2} \cdots x_{n-1}^1 x_n^0)$$

où  $\omega$  est l'inversion

$$\omega = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n-1 & n \\ n & n-1 & \dots & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

D'autres polynômes de Schubert avaient été introduits par Joseph Bernstein, Israel Gelfand et Serge Gelfand [8], et indépendamment par Michel Demazure [13], mais en faisant le calcul des différences divisées à partir d'un déterminant de Vandermonde : c'était différent. Les « polynômes de Schubert » de Lascoux et Schützenberger sont à coefficients entiers positifs et forment la partie combinatoire du *calcul de Schubert* (dont l'objet est de dénombrer des configurations de variétés algébriques). Ian Macdonald a publié un livre [37] sur les polynômes de Schubert, à partir des articles de Schützenberger.<sup>(13)</sup>

Récemment, Sergey Fomin et Anatol Kirillov [20] ont trouvé une définition géométrique des polynômes de Schubert ainsi que des « polynômes stables de Schubert » (il s'agit de polynômes symétriques, que l'on appelle aussi — de façon peut-être un peu trompeuse — les « parties symétriques » des polynômes de Schubert).

Vous avez des rayons laser qui partent des points  $1, 2, \dots, n$  disposés comme sur la figure (où  $n = 5$ ) Il y a des miroirs, disposés verticalement. Vous faites des trous dans les miroirs (les points noirs) : les rayons se réfléchissent sur les miroirs, et aux points noirs ils passent à travers. Les rayons issus des points  $1, 2, \dots, n$  ressortent dans un certain ordre, et cela définit une permutation. (Dans l'exemple montré sur la figure, c'est la permutation 54213, c'est-à-dire la permutation qui transforme le mot 12345 en 54213.) Prenez toutes les configurations donnant à l'arrivée une permutation  $\sigma$  fixée. Vous allez associer à chacune de ces configurations un certain monôme (un poids), de la façon suivante : vous tracez les diagonales, comme sur la figure, et vous leur associez respectivement les variables  $x_1, \dots, x_{n-1}$  ; puis à chacune de ces variables, vous affectez un exposant, qui est le nombre de points noirs qui se trouvent sur la diagonale correspondante. Par exemple,

<sup>13</sup>Voir aussi le beau livre de Laurent Manivel [38], 1998. (N.d.A.)

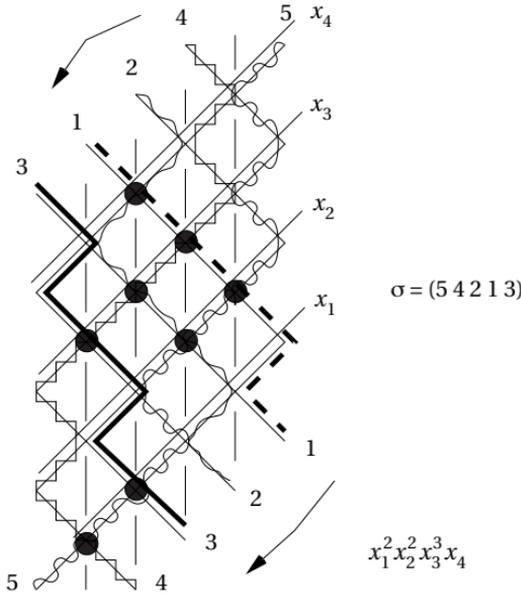


Fig. 18. Construction géométrique de Fomin-Kirillov pour la partie symétrique des polynômes de Schubert

pour la configuration montrée sur le dessin, cela conduit au monôme  $x_1^2 x_2^2 x_3^3 x_4$ . Ensuite, vous faites la somme des monômes pour toutes les configurations correspondant à la permutation  $\sigma$  : vous obtenez un polynôme symétrique. Le fait qu'il soit symétrique n'est pas évident, on le voit grâce à une expression géométrique de l'équation de Yang-Baxter (équation fameuse en physique statistique, dont elle est une des clés).

Pour obtenir les polynômes de Schubert eux-mêmes, il suffit de tronquer la figure de la façon suivante (fig. ). Les chemins naviguent dans une sorte de parallélogramme, union de deux triangles rectangles, les hypothénuses formant les côtés verticaux du parallélogramme. Il s'agit de ne garder que le triangle du bas.

Et (surprise !) il y a un lien avec les fonctions de Schur. Voici en gros de quoi il s'agit. Une identité dite *de Jacobi-Trudi* donne les fonctions de Schur sous la forme d'un déterminant, qu'on peut interpréter avec des configurations de chemins qui ne se coupent pas. On a vu à propos de l'inversion des matrices qu'il y a une dualité dans les chemins (souvenez-vous : les trous qui se propagent dans la toile d'araignée).

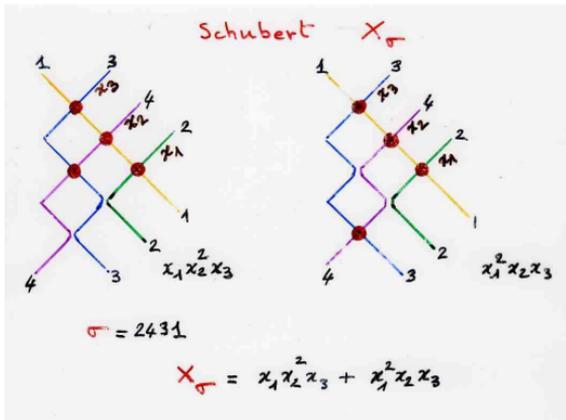


Fig. 19. Construction géométrique de Fomin-Kirillov pour les polynômes de Schubert

Pour toute configuration correspondant à Jacobi-Trudi, il y a une configuration duale, qui correspond à la formule de Trudi-Jacobi (duale de Jacobi-Trudi). Superposons une configuration de chemins pour Jacobi-Trudi et sa configuration duale :

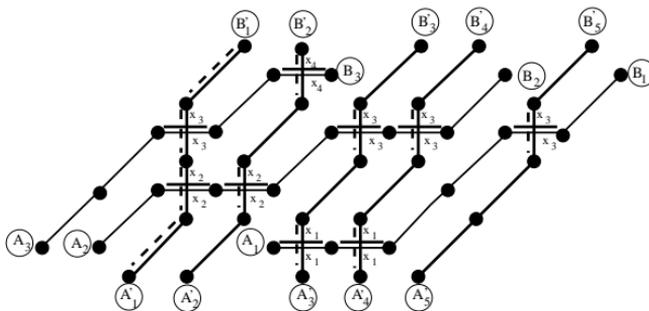


Fig. 20. Interprétation géométrique de l'identité de Jacobi-Trudi et de sa duale

Et voici le miracle : bougez un peu les chemins, mettez des miroirs, mettez des points noirs aux croisements : vous obtenez la construction géométrique de Fomin-Kirillov !

$$(\text{Fomin-Kirillov}) = (\text{Jacobi-Trudi}) + (\text{Trudi-Jacobi}).$$

## Deux tours de force : partitions planes et matrices à signes alternants

### Dix formules : un produit divisé par un produit

Dans l'un des dix problèmes sur la feuille que je vous ai distribuée [en appendice à la fin de cette *Leçon*], il y a dix formules contenant *un produit divisé par un produit* : ces dix formules énumèrent des classes de partitions planes. De quoi s'agit-il ? On a vu les partitions d'entiers, les diagrammes de Ferrers. Maintenant, je décompose  $n$  en sommes d'entiers, par exemple  $10 = 4 + 2 + 2 + 1 + 1$ , et je dessine les entiers sous forme planaire, dans les diagrammes de Ferrers avec décroissance large dans les lignes et les colonnes. C'est une partition plane. Je peux la représenter graphiquement. Sur chaque entier de la partition je pose des cubes : j'en pose respectivement 4, 2, 2, 1 et 1.

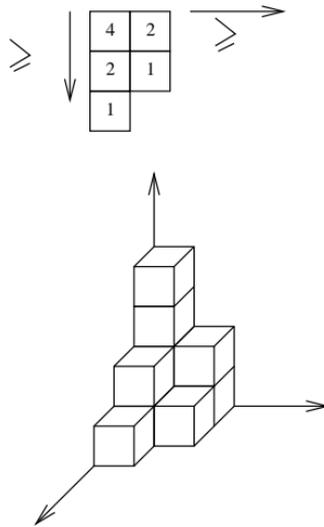


Fig. 21. Partition plane

J'obtiens alors un diagramme de Ferrers en trois dimensions : c'est l'analogue 3D des diagrammes de Ferrers 2D. C'est une espèce d'empilement de cubes dans le coin d'une pièce, et la montagne de cubes

ainsi formée n'a pas de pics quand on prend pour axe « vertical » n'importe lequel des trois axes de coordonnées. À l'envers (c'est-à-dire en changeant  $k$  en  $n - k$ ) cela fait un tableau de Young généralisé (avec croissance large dans les lignes et les colonnes) : partitions planes et tableaux de Young sont des notions très proches l'une de l'autre.

Il y a des tas de belles conjectures sur les partitions planes : il y a d'abord la célèbre conjecture de MacMahon, qui a été résolue par Andrews (1978), Macdonald (1979) et Proctor (1984). Il y a aussi une conjecture de Knuth et Bender (ce ne sont pas les mêmes partitions planes mais c'est lié) : elle a été démontrée par Andrews (1977), Gordon (1971, 1983), Macdonald (1979) et Proctor (1984), avec des calculs de déterminants énormes. Il y a également la conjecture de Macdonald, démontrée par Mills, Robbins et Rumsey ([39], 1982) : c'est en résolvant cette conjecture qu'ils ont découvert les matrices à signes alternants derrière la méthode de condensation des déterminants de Dodgson. Récemment, Christian Krattenthaler a fait toute une belle théorie sur la question, et il a trouvé une sorte de «  $q$ -analogue » de la notion de chemins qui ne se coupent pas.

On peut faire des symétries sur les diagrammes de Ferrers 3D : on échange deux axes, on fait des rotations, etc. Et on peut compter les partitions planes à ces symétries près : celles qui sont symétriques, celles qui sont totalement symétriques, etc. (à isomorphisme près, il y a dix classes de symétries). Et à chaque fois, on trouve des formules du type : *un produit divisé par un produit*. Les partitions planes se codent dans des tableaux de Young, qui se codent dans des chemins qui ne se coupent pas, qui sont des déterminants : donc en général ces formules sont des sommes de déterminants. Quand les chemins de départ et d'arrivée sont fixés, il y a un seul déterminant, mais si les chemins sont variables, c'est beaucoup plus compliqué, c'est une somme de déterminants, qui miraculeusement donne un produit divisé par un produit ; souvent, les déterminants eux-mêmes sont de la forme *un produit divisé par un produit*.

À l'époque de l'article de Robbins [42], il y avait encore trois conjectures ouvertes, mais depuis, toutes les formules ont été démontrées.

## TSSCPP

La plus belle d'entre elles, la dernière (la dixième), a été la plus dure de toutes : elle a résisté très longtemps, et puis elle a été démontrée

récemment par George Andrews [4]. Elle compte les partitions dans l'espace qui sont invariantes par toutes les permutations des trois axes et *autocomplémentaires* : si vous prenez une telle partition dans l'espace et que vous la mettez dans une boîte  $(2n) \times (2n) \times (2n)$ , elle doit être égale à la partition complémentaire dans la boîte. Selon la *conjecture* TSSCPP (*Totally Symmetric Self-Complementary Plane Partitions*), qu'Andrews a démontrée, le nombre de partitions totalement symétriques et autocomplémentaires est égal à  $S_n = \prod_{i=0}^{n-1} \frac{(3i+1)!}{(n+i)!}$ . Comme je l'ai déjà signalé (et je vais y revenir dans un instant), c'est aussi le nombre des matrices à signes alternants : il y a là une sorte de miracle!

Voici les sept partitions totalement symétriques autocomplémentaires incluses dans une boîte  $6 \times 6 \times 6$  :

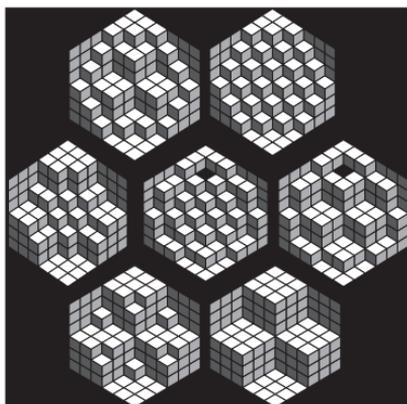


Fig. 22. Les 7 partitions totalement symétriques autocomplémentaires (pour  $2n = 6$ )

La démonstration de la conjecture TSSCPP a été un véritable *tour de force*. Les partitions planes peuvent être interprétées par des configurations de chemins qui ne se coupent pas, comme l'a montré Serge Dulucq dès 1985. On a vu que pour des extrémités fixées, le nombre de telles configurations est exprimé par un déterminant. John Stembridge [47], en 1990, s'est aperçu que si on utilise un *pfaffien* au lieu d'un déterminant, on peut compter des configurations qui n'ont pas les mêmes extrémités, ce qui permet de compter des partitions de formes différentes. En particulier, le nombre de partitions totalement symétriques

autocomplémentaires est donné par le pfaffien

$$S_n = \text{Pf}[a_{ij}] \quad \begin{cases} 0 \leq i < j \leq n-1 & \text{si } n \text{ est pair} \\ 1 \leq i < j \leq n-1 & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases}$$

avec

$$a_{ij} = \sum_{r=2i-j+1}^{2j-1} \binom{i+j}{r}$$

et il s'agit de calculer ce pfaffien. C'est ce qu'a fait Andrews. En utilisant *Axiom*, le logiciel d'IBM (Andrews a dit que sans *Axiom*, la conjecture serait encore là), il effectue des transformations qu'aucun cerveau humain n'aurait pu deviner, et puis, après de gros calculs, il se ramène à démontrer que

$$\sum_{k=1}^j \frac{2^{k+1}(-1)^{j-k}(2j-k)!(3k+5)(k+j+2)!(2k+3)!}{(j-k)!(k+1)!k!(k+2j+5)!} = 1.$$

Cela revient à une identité sur la fonction hypergéométrique

$${}_4F_3 \left( \begin{matrix} -j, \frac{8}{3}, j+3, \frac{5}{2}; -8 \\ \frac{5}{3}, -2j, 2j+6 \end{matrix} \right)$$

Et, surprise : ce n'est pas une identité classique, elle n'était même pas connue. Heureusement, on a maintenant la *WZ-methodology*, introduite par Herbert S. Wilf et Doron Zeilberger : ils ont fait un programme informatique (basé sur toute une théorie des fonctions holonomes) qui démontre automatiquement ce genre d'identités. Non seulement ce programme (Ekhad : un package Maple qui implémente la méthode WZ) démontre les identités, mais en plus l'ordinateur rédige l'article et le soumet ! L'ordinateur s'appelle *Shalosh*, et dans le premier article publié par *Shalosh*, au lieu du rituel *Supported partially by NSF* il était écrit *bought in full by NSF* (acheté en totalité par la *National Science Foundation*) ! Maintenant il y a même eu un papier cosigné par *Shalosh* et un autre ordinateur, en Suède ! Je vous invite à regarder la *home page* de Zeilberger et celle de *Shalosh*<sup>(14)</sup>. (Sur la *home page* de *Shalosh* vous trouverez une photo de l'ordinateur et sa liste de publications.)

Donc ce problème était, comme on dit, *shaloshable*. On ne sait pas si les identités de Rogers-Ramanujan, par exemple, le sont aussi : *Shalosh* n'a pas encore réussi à les démontrer (mais il a pu en démontrer des versions finies).

<sup>14</sup><http://www.math.rutgers.edu/~zeilberg/>  
<http://www.math.rutgers.edu/~zeilberg/ekhad/ekhad.html>.

Les preuves sont absolument épouvantables, *very ugly*, et Zeilberger, dans cette même salle, en mai 1991, a rappelé le vieil adage selon lequel « *l'extrême laideur peut être belle* » (« *extreme ugliness can be beautiful* »). Mais « *la beauté est plus belle encore* », d'où le premier des dix problèmes ouverts que je vous ai distribués [voir l'appendice à la fin de cette *Leçon*] : trouver une belle preuve.

## De TSSCPP aux matrices à signes alternants

La dernière conjecture, la seule qui restait ouverte, était celle des matrices à signes alternants : il fallait montrer que leur nombre était le même que celui des partitions totalement symétriques autocomplémentaires. Zeilberger vient de le démontrer [52], mais il faut voir la preuve!

Accrochez-vous bien : l'article fait 84 pages. Sur la première, il y a le nom de l'auteur, bien sûr, et puis — c'est la première fois qu'une pareille chose arrive en mathématiques — « *checked by David Bressoud and* » une liste de 86 noms ! C'est que l'article était impossible à référer, il y avait des calculs épouvantables (des calculs de résidus) qu'il fallait vérifier point par point. Alors Zeilberger a découpé son article en petits morceaux, sous forme arborescente (avec des *lemmas*, des *sublemmas* et jusqu'à des *subsubsubsubsubsublemmas*), et il a fait appel à la communauté combinatoire : il a groupé les gens deux par deux, et chaque binôme a eu à vérifier deux pages. Finalement, chaque binôme a certifié que ses deux pages étaient correctes, et Bressoud a certifié la démarche globale. Donc, puisque la preuve est certifiée globalement et localement, elle est correcte!

Et attention : Zeilberger ne démontre pas directement la formule pour  $S_n$ , il démontre qu'il y a autant de matrices à signes alternants que de partitions planes totalement symétriques autocomplémentaires, donc il se ramène à l'article d'Andrews, qui lui-même est apocalyptique!

Pourquoi y a-t-il exactement autant de TSSCPP que de matrices à signes alternants? *A priori*, ces deux classes d'objets n'ont rien à voir entre elles. Par exemple, les 7 partitions totalement symétriques autocomplémentaires de la figure 22 (p. 52) doivent correspondre aux sept matrices à signes alternants sur trois éléments : les six matrices de

permutations et la matrice

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Quelle est la correspondance ? On n'en a pas la moindre idée. La preuve de Zeilberger ne fournit pas de bijection, et c'est un fameux problème ouvert :

**Problème ouvert.** *Trouver une bijection entre les matrices à signes alternants et les partitions totalement symétriques autoccomplémentaires.*

Mais l'histoire est encore plus surprenante. En août 1995, Greg Kuperberg [30] a trouvé une autre preuve de la conjecture des matrices à signes alternants : il montre que ces matrices correspondent à un modèle de physique statistique, le modèle de la glace, avec certaines conditions aux bords, et qui avait été résolu par Anatoli Izergin et Vladimir Korepin au moyen d'un certain déterminant. Korepin, Bogolioubov et Izergin ont écrit un fameux livre sur les fonctions de corrélation en physique statistique [27], et ce déterminant y joue le rôle principal.

On ne peut pas en rester là : il faut trouver une explication combinatoire du déterminant d'Izergin-Korepin. Il faut une explication naturelle à toutes ces formules *produit divisé par produit* (y compris la dixième). Avec Myriam Desainte-Catherine [14], on avait essayé, il y a longtemps, d'expliquer cette formule *produit divisé par produit* :

$$\prod_{1 \leq i \leq j \leq n} \frac{2k + i + j}{i + j}.$$

Cette formule donne le nombre de couplages parfaits d'un graphe. Il y a beaucoup d'étapes intermédiaires dans le calcul : des chemins qui ne se coupent pas, des pfaffiens, des tableaux de Young, des déterminants de Hankel, des chemins de Dyck, et puis on passe à l'analyse : il y a un algorithme pour développer une série entière en fraction continue de Stieltjes ; cette partie numérique a un analogue combinatoire, et on arrive à la formule ci-dessus. Notre espoir, à Myriam et à moi, était de modifier ces chemins pour obtenir une théorie générale. On n'y est pas arrivé, mais Christian Krattenthaler vient de faire une théorie bijective de tous ces ingrédients (MacMahon, etc.) — ça se termine quand même par des calculs assez costauds, mais il reprend un peu

la même démarche, donc ce que nous avons fait doit pouvoir servir à quelque chose.

## Résolution combinatoire d'équations différentielles

J'ai déjà évoqué (p. 22) une théorie combinatoire des équations différentielles ordinaires, que j'ai développée avec Pierre Leroux, en partant de l'équation très simple  $y' = 1 + y^2$ ,  $y(0) = 0$ , caractérisant la fonction tangente, et interprétée par des arbres binaires croissants (ou des permutations alternantes). Maintenant, il va s'agir d'équations différentielles en régime forcé : nous sommes dans le domaine de l'*automatique non linéaire*. La surprise est que cette théorie combinatoire des équations différentielles ordinaires contient en germe tout ce qu'il faut pour résoudre combinatoirement des équations (provenant de l'automatique non linéaire) telles que

$$y'(t) = f(y, t) + u(t).$$

Habituellement, on a recours à des méthodes analytiques laborieuses et difficiles à implémenter sur un ordinateur. Mais on peut obtenir la solution par des manipulations combinatoires élémentaires et systématiques [11, 31, 19], grâce notamment à la méthode des séries génératrices non commutatives de Michel Fließ [18]. Prenons par exemple l'équation différentielle

$$\frac{dy}{dt} = \alpha y + \beta y^2 + u(t), \quad y(0) = \gamma. \quad (18)$$

On commence par passer à l'équation intégrale :

$$y(t) = \alpha \int_0^t y(\tau) d\tau + \beta \int_0^t y^2(\tau) d\tau + \int_0^t u(\tau) d\tau + \gamma. \quad (19)$$

Il y a une entrée  $u(t)$ , une sortie  $y(t)$ . La sortie est donnée en fonction de l'entrée par une *série de Volterra*, dont les termes sont proportionnels à des intégrales itérées, par exemple :

$$\int_0^t d\tau_5 \int_0^{\tau_5} d\tau_4 \int_0^{\tau_4} u(\tau_3) d\tau_3 \int_0^{\tau_3} d\tau_2 \int_0^{\tau_2} u(\tau_1) d\tau_1. \quad (20)$$

Remarquons en passant que pour  $u = 0$ , seules subsistent les intégrales itérées ne contenant pas  $u$ , c'est-à-dire de la forme

$$\int_0^t d\tau_k \int_0^{\tau_k} d\tau_{k-1} \cdots \int_0^{\tau_2} d\tau_1 = \frac{t^k}{k!}$$

et on a un développement en série entière : la série de Volterra est donc une généralisation de la série de Taylor. Maintenant, le problème est de savoir quel est le coefficient de chaque intégrale itérée dans la série de Volterra. La combinatoire donne la solution suivante. Chaque intégrale itérée est en bijection avec un mot, par exemple

$$x_0 x_0 x_1 x_0 x_1$$

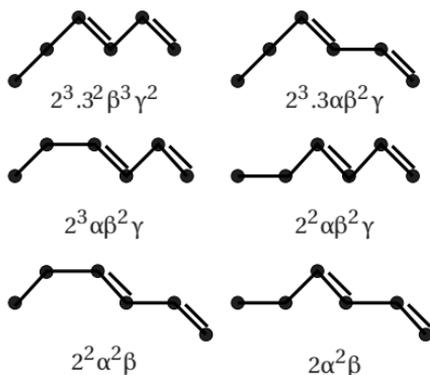
pour l'intégrale (20). L'équation (19) prend la forme symbolique :

$$H = \alpha x_0 H + \beta x_0 H \text{III} H + x_1 + \gamma,$$

où III est le « produit de mélange » (*shuffle product*)

$$u \text{III} v = \sum w$$

où l'on somme sur toutes les façons d'intercaler les lettres de  $u$  et  $v$ . La résolution combinatoire de cette équation passe par les arbres. L'exemple que nous avons vu précédemment, dans le cas des nombres tangents (p. 22), était très particulier mais parfaitement significatif de la méthode. Puis des arbres on passe aux chemins, et on fait la somme des poids : le coefficient associé à l'intégrale itérée (20) est égal à la somme des poids.



$$c(w) = 36\beta^3\gamma^2 + 36\alpha\beta^2\gamma + 6\alpha^2\beta$$

Fig. 23. Calcul du coefficient de l'intégrale itérée associée au mot  $w = x_0 x_0 x_1 x_0 x_1$

Il y a donc une traduction combinatoire de l'équation en régime forcé. Et, par exemple, la résolution de la célèbre *équation de Duffing*

$$y'' = ay' + y + by^3 + u(t), \quad (21)$$

(décrivant un oscillateur attiré par un double puits de potentiel) se ramène à des calculs relatifs à une certaine famille de chemins valués du plan discret, d'une manière analogue aux chemins de l'exemple précédent.<sup>15</sup> Pour plus de détails, on peut se reporter à l'article pédagogique [35].

## Combinatoire et physique statistique

Je vais conclure par un petit peu de physique statistique.

### Animaux dirigés

La notion d'*animal dirigé* est apparue en physique statistique vers 1980, comme modèle de percolation. Un animal dirigé, c'est un ensemble de points, avec un point source, et la condition que n'importe quel point de l'ensemble peut être atteint à partir du point source par un chemin formé de points appartenant à l'animal et qui ne fait que des pas élémentaires vers l'est ou vers le nord.

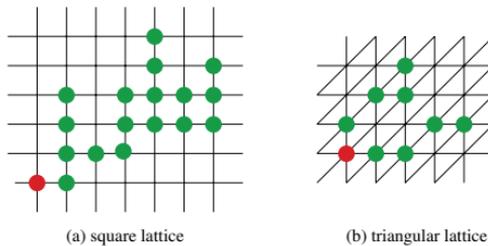


Fig. 24. Animaux dirigés

<sup>15</sup>En fait, pour avoir tout à fait l'analogue, il faudrait prendre les *projections* des chemins de la figure 23 sur l'axe vertical, et avoir ainsi des chemins sur la *droite* discrète (ceux que montre la figure sont les « déployés dans le temps », pour mieux les voir). Pour l'équation de Duffing les chemins sont de vrais chemins de dimension 2, ils ne sont pas sur une *droite* discrète mais dans un *plan* discret. (N.d.A.)

Le problème de compter les animaux dirigés de taille  $n$  s'est posé aux physiciens, et dès que nous avons reçu l'article ici, à Bordeaux, nous avons immédiatement sauté dessus : les entiers qui intervenaient appartenaient à des suites que nous connaissions. On avait les outils qu'il fallait, juste au bon moment, alors on a appris ce qu'il fallait de physique et on a résolu le problème, avec une preuve bijective. Non seulement on peut énumérer les animaux dirigés, mais la preuve bijective que nous avons obtenue permet d'en tirer de manière aléatoire : je me fixe  $n = 10000$ , et je veux trouver un algorithme qui en temps fini me donne un animal dirigé, de telle façon que chaque animal apparaisse avec la même probabilité. Ce n'est pas facile, parce que si vous mettez les points un par un au hasard, vous n'allez pas du tout avoir un animal dirigé aléatoire, vous allez avoir un agglomérat ; et ce sera un fractal de dimension 1, ou même pas un fractal du tout, parce qu'il y aura plein de fissures. Tandis que les animaux dirigés sont des objets très fins, ce sont des objets fractals très spéciaux, parce qu'ils ont en fait deux dimensions fractales : une vers le nord-est et une vers le sud-est.

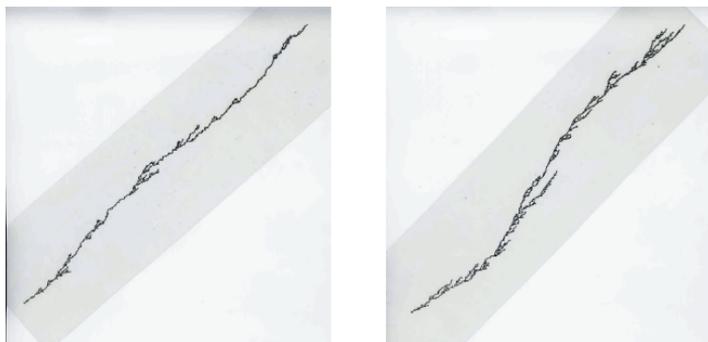


Fig. 25. Animaux dirigés aléatoires

Derrière ces animaux dirigés il y a toute l'informatique théorique, avec ses grammaires : grammaires algébriques, grammaires d'objets. On utilise des opérateurs, chaque opérateur correspondant à une grammaire, et on leur attribue une couleur, ce qui permet de voir ce qui s'est passé.

## Les hexagones durs

Le modèle des hexagones durs est un beau modèle de physique statistique, un modèle de gaz adsorbé sur un réseau plan. On considère dans le plan un réseau hexagonal, et les molécules du gaz peuvent venir occuper les sites du réseau, à raison d'une seule molécule par site, et avec une contrainte : deux sites voisins ne peuvent pas être simultanément occupés. Pour rendre cette contrainte visuellement évidente, on représente souvent les molécules par des hexagones de diamètre légèrement supérieur au demi-diamètre des mailles du réseau : la condition est alors simplement que les hexagones ne s'interpénètrent pas, d'où le nom du modèle.

En physique statistique, il y a une fonction thermodynamique, la *fonction de partition*, à partir de laquelle on peut calculer toutes les autres. En 1980, Rodney Baxter a complètement résolu le modèle des hexagones durs : il a calculé sa fonction de partition (voir [6]). Et la surprise est qu'on y voit resurgir les identités de Rogers-Ramanujan (6) (p. 17) et (7) (p. 18) : faisons le quotient de leurs membres de droite :

$$R(q) = \prod_{n \geq 0} \frac{(1 - q^{5n+1})(1 - q^{5n+4})}{(1 - q^{5n+2})(1 - q^{5n+3})}.$$

Il est égal à la fameuse *fraction continue* de Ramanujan :

$$R(q) = \frac{1}{1 + \frac{q}{1 + \frac{q^2}{1 + \frac{q^3}{1 + \dots}}}} \quad (22)$$

Posons

$$t = -q [R(q)]^5 \quad (23)$$

et

$$Y(q) = \prod_{n \geq 0} \frac{(1 - q^{6n+2})(1 - q^{6n+3})^2(1 - q^{6n+4})(1 - q^{5n+1})^2(1 - q^{5n+4})^2(1 - q^{5n})^2}{(1 - q^{6n+1})(1 - q^{6n+5})(1 - q^{6n})^2(1 - q^{5n+2})^3(1 - q^{5n+3})^3}. \quad (24)$$

En éliminant  $q$  entre (23) et (24), vous obtenez la fonction de partition  $Z(t)$ . Vous en déduisez que la température de sublimation (le passage du solide au gaz) dans le modèle des hexagones durs est le nombre

d'or à la puissance 5 (notez que pour  $q = 1$  la fraction continue de Ramanujan est égale au nombre d'or). L'exposant critique est  $5/6$ , et il paraît que cet exposant critique a été mesuré par les physiciens dans certaines transitions de phase en 2D de couches d'hélium adsorbées sur du graphite.

Dans ce modèle des hexagones durs il n'y a pas que les identités de Rogers-Ramanujan, il y a 14 identités du même type, dont 8 sont nouvelles et Andrews a dû créer toute une théorie pour les démontrer.

Maintenant, prenez un hexagone et placez-le sur un site, disons O ; puis placez-en d'autres, successivement, mais toujours sur un site voisin d'un hexagone déjà posé (ou sur le même site) : ce que vous obtenez s'appelle une *pyramide* (renversée) posée sur O. Souvent, on préfère la regarder à l'endroit, donc on met le premier hexagone assez haut au-dessus du site O et puis on vient coller les autres par dessous. Regardez comme c'est joli :

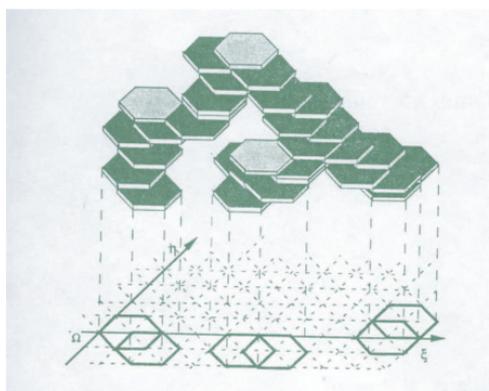


Fig. 26. Pyramide d'hexagones

Il y a un nombre fini de pyramides à  $n$  hexagones ayant leur sommet au-dessus du site O (le choix de ce site est évidemment indifférent). Combien y en a-t-il ? Eh bien posez

$$\rho(t) = t \frac{d \ln Z(t)}{dt}$$

(c'est la densité du gaz) et développez en série,

$$\rho(t) = \sum_{n \geq 1} (-1)^{n-1} a_n t^n.$$

Les  $a_n$  sont des entiers : ce sont les nombres cherchés. Autrement dit,  $-\rho(-t)$  est la fonction génératrice des pyramides d'hexagones. Ceci résulte d'une théorie combinatoire que j'ai développée il y a dix ans [51], appelée théorie des *empilements de pièces*, et qui donne une interprétation géométrico-combinatoire de la théorie algébrique des monoïdes de commutations introduite et développée par Pierre Cartier et Dominique Foata. C'est une fonction algébrique, d'après les formules précédentes, mais du point de vue combinatoire on ne comprend pas pourquoi : c'est un des dix problèmes ouverts que je vous ai distribués. Peut-être qu'une preuve combinatoire passerait à d'autres modèles, non exactement résolubles ? Il y a par exemple le problème des carrés durs : on remplace le réseau hexagonal par un réseau carré, ce qui revient à remplacer les hexagones durs par des carrés durs (dont les *diagonales* sont parallèles aux directions du réseau) : la fonction  $-\rho(-t)$  est la fonction génératrice des pyramides de carrés, elle se calcule comme ci-dessus à partir de la fonction de partition  $Z(t)$  : mais dans ce modèle-là, on n'a jamais réussi à calculer la fonction  $Z(t)$  !

## La théorie des champs bidimensionnelle

Je terminerai avec une brève évocation de la théorie conforme des champs (TCC ; en anglais CFT, pour *Conformal Field Theory*), qui est très liée à la physique statistique.

Prenez un chemin de Dyck  $\omega$ . On symbolise un pas nord-est par  $x$ , un pas sud-est par  $\bar{x}$ . Le chemin de Dyck  $\omega$  devient un « mot de Dyck » sur l'alphabet à deux lettres  $\{x, \bar{x}\}$  :  $\omega \rightarrow w = x_1 x_2 \dots x_{2n} \in \{x, \bar{x}\}^*$ . On lui associe un poids  $V(\omega)$  de la façon suivante :

$$V(\omega) = \sum_{\substack{j \\ x_j = x_{j+1} = x}} j + \sum_{\substack{j \\ x_j = x_{j+1} = \bar{x}}} j. \quad (25)$$

Autrement dit, on prend les indices des pas à l'issu desquels le marcheur décide de *ne pas changer* de direction, et on fait la somme. Voici un exemple (les doubles montées  $xx$  et les doubles descentes  $\bar{x}\bar{x}$  sont symbolisées par les petits points noirs) :

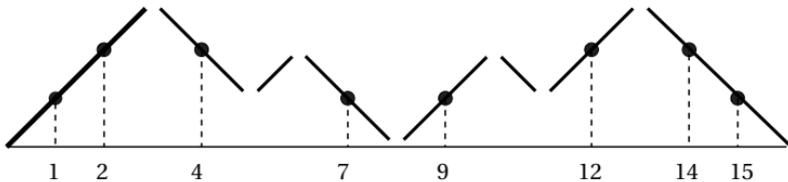


Fig. 27. Un chemin de Dyck et son poids  $V(\omega) = 1 + 2 + 4 + 7 + 9 + 12 + 14 + 15$

Par ailleurs, pour  $q \in \mathbb{C} \setminus \{0, 1, -1\}$ , on définit les  $q$ -entiers,  $q$ -factorielles et  $q$ -coefficients binomiaux de la façon suivante (où  $m, k \in \mathbb{Z}$ ) :

$$[k]_q = \frac{q^k - 1}{q - 1}, \quad [k]_q! = [k]_q [k-1]_q \cdots [1]_q, \quad \begin{bmatrix} m \\ k \end{bmatrix}_q = \frac{[m]_q!}{[k]_q! [m-k]_q!}.$$

**Proposition.**

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{|\omega|=2m \\ h(\omega) \leq p-1}} V(\omega) &= \sum_{m_1, \dots, m_{p-2}=0}^{\infty} q^{\vec{m}^T \mathcal{C}_{p-2} \vec{m}} \prod_{j=1}^{p-2} \begin{bmatrix} m_{j-1} + m_{j+1} \\ 2m_j \end{bmatrix}_q \\ &= \sum_{j=-\infty}^{+\infty} \left( q^{p(p+1)j^2+j} \begin{bmatrix} 2m \\ m - (p+1)j \end{bmatrix}_q \right. \\ &\quad \left. - q^{p(p+1)j^2+(2p+1)j+1} \begin{bmatrix} 2m \\ m-1 - (p+1)j \end{bmatrix}_q \right) \quad (26) \end{aligned}$$

où  $|\omega|$  est la longueur du chemin  $\omega$ ,  $h(\omega)$  sa hauteur maximale;  $m_0 = m$ ,  $m_{p-1} = 0$ ,  $\vec{m}^T = (m_1, \dots, m_{p-2})$ , transposé du vecteur colonne  $\vec{m}$ ;  $\mathcal{C}_{p-2}$  est la matrice donnée par :

$$(\mathcal{C}_{p-2})_{jk} = 2\delta_{jk} - \delta_{j,k+1} - \delta_{j+1,k}$$

où  $\delta_{jk}$  est le symbole de Kronecker, égal à 1 si  $j = k$  et à 0 sinon. (Pour ceux qui connaissent :  $\mathcal{C}_{p-2}$  est la matrice de Cartan de l'algèbre de Lie  $A_{p-2}$ .)

La somme sur  $m_1, \dots, m_{p-2}$  dans (26) est essentiellement la fonction de partition d'un système de *fermions*, tandis que la somme sur  $j$  est essentiellement la fonction de partition d'un système de *bosons*.

Les *fermions* (qui obéissent au principe d'exclusion de Pauli) et les *bosons* (qui n'y obéissent pas) sont des particules complètement différentes, et pourtant ce système de fermions est équivalent à ce système de bosons! (C'est ce qu'on appelle une *bosonisation*.) De plus, leur fonction de partition s'exprime comme une somme de poids de chemins de Dyck. C'est aussi un caractère de l'algèbre de Virasoro : quand j'ai montré les chemins de Dyck à John Cardy, qui est un spécialiste de TCC, il m'a dit : « mais ce sont les caractères de l'algèbre de Virasoro ! » À gauche vous avez cette somme qui vient de la TCC, et à droite, vous avez deux séries, qui proviennent de la physique statistique, plus précisément des modèles exactement résolubles de Yang-Baxter, et qui viennent en fait, comme pour les hexagones durs, du calcul des valeurs propres de la matrice de transfert.

Pour terminer, puisque je suis dans la physique, récemment deux physiciens (B. Nilsson et P. Sundell, en 1995) ont montré que les nombres de Catalan apparaissaient en théorie des cordes, par cette identité nouvelle

$$C_k = \sum_{m=0}^{\lfloor k/2 \rfloor} 2^{2(m-k)} \sum_{n_\mu} \left( \prod_{\mu=1}^{2m} \frac{n_{\mu-1} - n_\mu}{n_{\mu-1} + n_\mu + 1} \right) \left( \prod_{\mu=0}^{2m} (n_\mu + 1) C_{n_\mu} \right)^2 \quad (27)$$

où  $n_\mu \in \mathbb{N}$ , avec  $\sum_{\mu=0}^{2m} n_\mu = k - m$ . On demande l'explication combinatoire de cette identité. Ces physiciens nous ont assurés qu'une compréhension combinatoire de cette identité pourrait faire avancer leur compréhension de cette partie de la théorie des cordes.

## Appendice : dix problèmes ouverts

Voici dix « grands » problèmes de combinatoire, toujours irrésolus au moment de la *Leçon*.<sup>(16)</sup>

---

<sup>16</sup>Pour l'état de l'art en mai 2006, voir la note qui suit cet appendice. (N.d.R.)

### 1. Le nombre de matrices à signes alternants (Mills, Robbins, Rumsey, Zeilberger, Kuperberg)

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad S_n = \prod_{i=0}^{n-1} \frac{(3i+1)!}{(n+i)!}.$$

**Problème.** Trouver une preuve combinatoire que  $S_n$  est le nombre de matrices à signes alternants d'ordre  $n$ . Trouver une bijection entre ces matrices et les TSSCPP.

### 2. Le déterminant quantique d'Izergin-Korepin

Izergin et Korepin [27] expriment une certaine fonction de partition  $Z(n; X, Y)$  par la formule suivante

$$Z(n; X, Y) = \frac{(-1)^n \left( \prod_{i=0}^{n-1} q^{(y_i - x_i)/2} \right) \prod_{0 \leq i, j < n} [x_i - y_j][x_i - y_j - 1]}{\left( \prod_{0 \leq j < i < n} [x_i - x_j] \right) \left( \prod_{0 \leq i < j < n} [y_i - y_j] \right)} \det M, \quad (28)$$

où

$$M_{ij} = \frac{1}{[x_i - y_j][x_i - y_j - 1]}.$$

Cette formule est à la base de la preuve de Kuperberg de la conjecture des matrices à signes alternants.

**Problème.** Trouver une interprétation combinatoire du second membre et en déduire une preuve de la formule.

### 3. Dix formules pour les classes de symétrie des partitions planes

Notons  $P_k(n)$  le nombre de partitions planes de la  $k$ -ième classe de symétrie (définie ci-dessous pour  $k \in \{1, \dots, 10\}$ ) dont les diagrammes de Ferrers sont dans une boîte  $n \times n \times n$ . Il n'y a pas de partition plane pour  $n$  impair dans les classes de symétrie autocomplémentaires.

**Problème.** Donner une preuve bijective des formules suivantes :

1. Pas de restriction :

$$P_1(n) = \prod_{1 \leq i, j, k \leq n} \frac{i+j+k-1}{i+j+k-2}.$$

2. Symétrie (échange des axes  $x$  et  $y$ ) :

$$P_2(n) = \prod_{\substack{1 \leq i, j, k \leq n \\ i \leq j}} \frac{i + j + k - 1}{i + j + k - 2}.$$

3. Symétrie cyclique (permutation cyclique des trois axes de coordonnées)

$$P_3(n) = \prod_{1 \leq i < j < k \leq n} \frac{i + j + k - 1}{i + j + k - 2} \prod_{1 \leq i \leq j \leq n} \frac{2i + j - 1}{2i + j - 2}.$$

4. Symétrie totale (les six permutations des axes de coordonnées) :

$$P_4(n) = \prod_{1 \leq i \leq j \leq k \leq n} \frac{i + j + k - 1}{i + j + k - 2}.$$

5. Autocomplémentarité :

$$P_5(2n) = P_1(n)^2.$$

6. Complémentaire = image miroir :

$$P_6(2n) = \binom{3n-1}{2n-1} \prod_{1 \leq i \leq j \leq 2n-2} \frac{2n + i + j + 1}{i + j + 1}.$$

7. Symétrie et autocomplémentarité :

$$P_7(2n) = P_1(n).$$

8. Symétrie cyclique et complémentaire = image miroir :

$$P_8(n) = \prod_{i=0}^{n-1} \frac{(3i+1)(6i)!(2i)!}{(4i+1)!(4i)!}.$$

9. Symétrie cyclique et autocomplémentarité :

$$P_9(2n) = P_{10}(2n)^2.$$

10. Symétrie totale et autocomplémentarité :

$$P_{10}(2n) = \prod_{i=0}^{n-1} \frac{(3i+1)!}{(n+i)!}.$$

#### 4. Pyramides d'hexagones. Hexagones durs de Baxter

Ces questions sont évoquées dans la *Leçon*.

**Problème.** *Preuve combinatoire du fait que  $\rho$  est une fonction algébrique ? Résolution du modèle des carrés durs ?*

#### 5. Modèle d'Ising $D = 2$ , champ magnétique extérieur non nul

C'est un modèle classique de la physique statistique. Lars Onsager l'a résolu dans les années 1940 pour un champ magnétique nul. Le problème reste ouvert pour un champ magnétique non nul. Comme dans le modèle des hexagones durs, une solution permettrait d'expliquer des séries génératrices d'objets combinatoires.

**Problème.** *Résolution ?*

#### 6. Polynômes de Kazhdan-Lusztig

Il s'agit de polynômes à coefficients entiers, introduits en 1979 par David Kazhdan et George Lusztig, et qui jouent un grand rôle dans diverses parties de l'algèbre. Étant donné leur importance et leur ubiquité, on cherche depuis longtemps une interprétation combinatoire de leurs coefficients.

**Problème.** *Interprétation combinatoire ?*

#### 7. Polygones, animaux, polyominos, chemins ne se recoupant pas

**Problème.** *Sur un réseau 2D, trouver des formules de dénombrement pour :*

- *le nombre de chemins de longueur  $n$  ne se recoupant pas avec eux-mêmes ;*
- *le nombre d'animaux généraux de taille  $n$  ;*
- *le nombre de polygones de longueur  $n$ .*

#### 8. Identités de Rogers-Ramanujan

Ce sont les identités (6) (p. 17) et (7) (p. 18).

**Problème.** *Preuve bijective (sans les involutions de Garsia-Milne) ?*

#### 9. Nombres de Catalan en théorie des cordes (Nilsson-Sundell)

**Problème.** *Donner une explication combinatoire de l'identité (27) de Nilsson et Sundell.*

## 10. $(q, t)$ -Catalan de Garsia-Haiman

Soit  $\mu$  une partition de  $n$  représentée graphiquement par son diagramme de Ferrers  $F$ . Pour chaque case de  $F$ , on définit les quatre entiers suivants :

$a$  = le nombre de cases à droite de la case choisie,

$a'$  = le nombre de cases à gauche de la case choisie,

$l$  = le nombre de cases au-dessus de la case choisie,

$l'$  = le nombre de cases en dessous de la case choisie.

Posons :

$$C_n(q, t) = \sum_{\mu} \frac{t^{2\Sigma l} q^{2\Sigma a} (1-t)(1-q) \prod^{0,0} (1-q^{a'} t^{l'}) \Sigma q^{a'} t^{l'}}{\prod (q^a - t^{l+1})(t^l - q^{a+1})} \quad (29)$$

où les sommes et produits sont pris sur toutes les cases de  $F$ , sauf le produit noté  $\prod^{0,0}$  dans lequel on exclut la case  $(0,0)$  qui se trouve en bas à gauche de  $F$ .

**Problème.** *Prouver que  $C_n(q, t)$  est un polynôme en  $q$  et  $t$  à coefficients entiers positifs, dont la somme est le nombre de Catalan  $C_n$ , et donner une interprétation combinatoire de ces coefficients.*

### Note ajoutée en mai 2006, par X. Viennot

Depuis cette Leçon donnée le 5 décembre 1996, le domaine de la combinatoire s'est beaucoup développé, avec des surprises et des avancées spectaculaires.

Une référence aujourd'hui bien connue en combinatoire énumérative est le livre en deux volumes de Richard Stanley [46]. Une autre référence, mettant plus particulièrement l'accent sur la « combinatoire analytique » et l'analyse des algorithmes en informatique, est le livre en préparation de Philippe Flajolet et Robert Sedgewick, dont une version préliminaire est disponible sur la toile<sup>(17)</sup> : la première partie (*Part A : Symbolic Methods*), avec ses trois chapitres, est dans l'esprit de cette Leçon. On trouvera un excellent exposé des structures exponentielles dans le livre de François Bergeron, Gilbert Labelle et Pierre Leroux [7].

Nous résumerons ici simplement quelques progrès réalisés relativement aux dix « problèmes ouverts » que nous avons donnés (d'une façon un peu provocatrice) à la fin de cette Leçon.

<sup>17</sup><http://algo.inria.fr/flajolet/Publications/books.html>

### 1,2,3. Matrices à signes alternants et symétries des partitions planes

Un livre a été écrit par David Bressoud sur le sujet des thèmes 1, 2 et 3 : D. Bressoud, *Proofs and confirmations : the story of the alternating sign matrix conjecture*, Cambridge University Press, 1999. Un article de synthèse est : J. Propp, *The many faces of alternating-sign matrices*, Discrete Math. and Theoretical Computer Science, Proceedings AA (2001), p. 43-58, dmtcs.lori.fr.

À propos du déterminant quantique du problème 2, voir l'article d'Alain Lascoux, *Square-ice enumeration*, The Andrews Festschrift, Maratea, 1998 : Séminaire Lotharingien de Combinatoire, B42p (1999), 15 p. : [www.mat.univie.ac.at/~slc](http://www.mat.univie.ac.at/~slc).

Certaines unifications des dix formules du problème 3 ont été données par G. Kuperberg, mais il manque toujours une véritable compréhension combinatoire de ce vaste sujet. Malgré plus de 20 ans d'efforts, aucune bijection (ni même un début d'explication combinatoire) n'a été trouvée entre les matrices à signes alternants et les partitions planes totalement symétriques et autoccomplémentaires (TSSCPP), tout comme les partitions planes descendantes introduites par G. Andrews et énumérées par les mêmes nombres. Comme le dit David Bressoud à la fin de son livre : *ce n'est qu'un début*. D'autant plus qu'une grosse surprise est arrivée avec le nouveau siècle : le nombre de matrices à signes alternants est réapparu en physique quantique dans le modèle de Heisenberg XXZ de chaînes de spins. C'est la fameuse conjecture de Rasumov-Stroganov : A. V. Rasumov et Yu. G. Stroganov, *Spin chains and combinatorics*, J. Phys. A **34** (2001), p. 3185-3190 ; arXiv : [math.CO/0012141](http://math.CO/0012141).

Une version « faible » a été démontrée par les physiciens Di Francesco et Zinn-Justin, en liaison avec le modèle  $O(1)$  à boucles compactes sur un cylindre : P. Di Francesco et P. Zinn-Justin, *Around the Rasumov-Stroganov conjecture : proof of a multi-parameter sum rule*, arXiv : [math.ph/0410061](http://math.ph/0410061).

Tout un paquet d'entiers apparaissent ; la conjecture forte de Rasumov-Stroganov, qui propose une interprétation combinatoire de ces entiers avec les FPL (*fully packed loops*), résiste toujours aux efforts des combinatoristes et des physiciens. D'autres entiers et d'autres conjectures sont aussi apparus. Un article de synthèse est : J. de Gier, *Loops, matchings and alternating-sign matrices*, Discrete Math. **298** (2005), p. 365-388 ; arXiv : [math.CO/0211285](http://math.CO/0211285) (conférence invitée au 14<sup>e</sup> FPSAC,

juillet 2002, Melbourne).

Voir aussi sur arXiv une bonne douzaine d'articles récents par les physiciens P. Di Francesco, P. Zinn-Justin et J.-B. Zuber, ou encore ceux de J. M. Maillet, N. Kitanine, C. Krattenthaler, etc.

## 6. Polynômes de Kazhdan-Lusztig

Après les travaux pionniers d'Alain Lascoux et Marcel-Paul Schützenberger, des progrès décisifs ont été effectués dans la compréhension combinatoire de ces polynômes par F. Brenti et son École combinatoire à Rome. Un article de synthèse est : F. Brenti, *Kazhdan-Lusztig polynomials : History, Problems and Combinatorial invariance*, Séminaire Lotharingien de Combinatoire **46** (2003), article B49b, 30 p.

## 7. Polygones, animaux...

Il est probable qu'il n'existe pas de formules de dénombrements pour ces familles d'objets généraux. Par contre des progrès ont été effectués pour donner des formules exactes pour de nouvelles familles de polyominos ou animaux. En particulier, la plus « grosse » classe « énumérable » (animaux multidirigés) a été introduite dans : M. Bousquet-Mélou et A. Rechnitzer, *Lattice animals and heaps of dimers*, Discrete Math. **258** (2002), p. 235-274.

La série génératrice n'est pas différentiellement finie, mais une formule est donnée sous la forme d'une substitution d'une série algébrique dans une  $q$ -série. Une preuve bijective, ainsi que le lien avec la gravitation quantique 2D, est donnée dans :

X. G. Viennot, *Multidirected animals, connected heaps of dimers and Lorentzian triangulations*, Proceeding « Counting Complexity », Electronic Journal of Physics : Conference Series, juillet 1996, à paraître.

## 8. Identités de Rogers-Ramanujan

Une nouvelle preuve « partiellement bijective » est donnée dans : I. Pak et C. Boulet, *A combinatorial proof of the Rogers-Ramanujan identities*, à paraître dans J. Combin. Theory A; arXiv : math.CO/0411072.

## 10. $(q, t)$ -Catalan de Garsia-Haiman

La formule (29) est une somme de fractions rationnelles. La conjecture de Garsia et Haiman était que cette somme se réduit à un polynôme à coefficients entiers positifs, dont la somme des coefficients est

le nombre de Catalan  $C_n$ , voir :

A. M. Garsia et M. Haiman, *A remarkable  $(q, t)$ -Catalan sequence and  $q$ -Lagrange inversion*, J. Algebraic Combin. **5** (1996), p. 191-244.

Des preuves sont données dans : F Bergeron, A. M. Garsia, M. Haiman et G. Tesler, *Identities and Positivity Conjectures for some remarkable Operators in the Theory of Symmetric functions*, Methods and Applications of Analysis **VII** 3 (1999), p. 363-420.

A. M. Garsia et J. Haglung, *A proof of the  $(q, t)$ -Catalan positivity Conjecture*, LACIM 2000 Conference on Combinatorics, Computer Science and Applications (Montréal), Discrete Math. **256** (2002), p. 677-717.

Un article de synthèse, expliquant le lien avec d'autres sujets « chauds » de la combinatoire, comme la positivité des polynômes de Macdonald, la fameuse *Conjecture  $n!$*  ainsi que le lien avec la géométrie algébrique (schémas de Hilbert), est :

M. Haiman, *Combinatorics, symmetric functions and Hilbert schemes* : p. 39-112 de CDM 2002, *Current developments in Mathematics in honor of Wilfrid Schmid & George Lusztig*, International Press Books, 2003.

Une interprétation combinatoire des polynômes de l'identité (29) est proposée dans J. Haglund, *Conjectured statistics for the  $(q, t)$ -Catalan numbers*, Adv. Math. **175** (2003), p. 319-334.

En fait, le polynôme  $C_n(q, t)$  est symétrique en  $q$  et  $t$ . Ce fait n'apparaît pas naturellement dans l'interprétation de Haglund, et une explication combinatoire de cette symétrie reste à trouver.

### Bibliographie

- [1] F. Acerbi, *On the shoulders of Hipparchus : A reappraisal of Ancient Greek Combinatorics*, Arch. Hist. Exact Sci. **57** (2003), p. 465-502.  
<http://stl.recherche.univ-lille3.fr/sitespersonnels/acerbi/acerbipub5.pdf>
- [2] M. Aigner et G. M. Ziegler, *Raisonnements divins. Quelques démonstrations mathématiques particulièrement élégantes (Proofs from The Book)*, trad. de l'anglais par N. Puech et J.-M. Morvan, Springer-Verlag, Paris, 2002.
- [3] D. André, *Développements en séries des fonctions elliptiques et de leurs puissances*, Ann. de l'École Normale **6** (1877), p. 265-328.
- [4] G. E. Andrews, *Plane partitions. V: the TSSCPP conjecture*, J. Comb. Theory, Ser. A **66**, n° 1 (1994), p. 28-39.
- [5] V. I. Arnold, *Nombres d'Euler, de Bernoulli et de Springer pour les groupes de Coxeter et les espaces de morsification : le calcul des serpents*, in : *Leçons de Mathématiques d'Aujourd'hui*, vol. 1, Cassini (Paris), 2000.

- [6] R. Baxter, *Exactly solved models in statistical mechanics*, Academic Press, 1982.
- [7] F. Bergeron, G. Labelle et P. Leroux, *Combinatorial species and tree-like structures*, Encyclopedia of Mathematics and its applications, Cambridge University Press, 1998.  
Version originale, en français : *Théorie des espèces et combinatoire des structures arborescentes*, vol. 19 des Monographies du LACIM, UQAM, Montréal.
- [8] I. N. Bernšteĭn, I. M. Gel'fand et S. I. Gel'fand, *Schubert cells, and the cohomology of the spaces G/P* (en russe), *Uspekhi Mat. Nauk* **28** (1973), p. 3-26.
- [9] D. M. Bressoud et J. Propp, *How the Alternating Sign Matrix Conjecture was Solved*, *Notices Amer. Math. Soc.* **46** (1999), p. 637-646.
- [10] D. M. Bressoud, *Proofs and confirmations : the story of the alternating sign matrix conjecture*, Cambridge University Press, Cambridge, 1999.
- [11] J. J. Busgang, L. Ehrman et J. W. Graham, *Analysis of Nonlinear Systems with Multiple Inputs*, *Proceedings of the IEEE*, vol. 62, p. 1088-1119, Aug. 1974.
- [12] L. Comtet, *Analyse combinatoire* (tomes 1 et 2), Presses universitaires de France, 1970. (Coll. SUP : le mathématicien.) Édition revue et augmentée, en anglais : *Advanced combinatorics, the art of finite and infinite expansions*, Reidel publishing company, 1974.
- [13] M. Demazure, *Désingularisation des variétés de Schubert généralisées*, *Ann. Sci. École Norm. Sup. Paris* **7** (1974), p. 53-88.
- [14] M. Desainte-Catherine et X. G. Viennot, *Combinatorial interpretation of integrals of products of Hermite, Laguerre and Tchebycheff polynomials*, in *Polynômes orthogonaux et applications*, Proc. Laguerre Symp., Bar-le-Duc 1984, *Lect. Notes Math.* vol. 1171 (1985), p. 120-128.
- [15] C. L. Dodgson, *Condensation of Determinants, being a new and brief Method for computing their arithmetic values*, *Proc. Roy. Soc.* **15** (1866-1867), p. 150-155.
- [16] L. Euler, *Calcul de la probabilité dans le jeu de rencontre*, *Mém. Acad. Berlin*, (1751 / publ. 1753), p. 255-270.
- [17] M. E. Fisher, *Walks, walls, wetting, and melting*, *J. Stat. Phys.* **34** (1984), p. 667-729.
- [18] M. Fliess, *Fonctionnelles causales non linéaires et indéterminées non commutatives*, *Bull. Soc. Math. France* **109** (1981), p. 3-40.
- [19] M. Fliess, M. Lamnabhi et F. Lamnabhi-Lagarrigue *An algebraic approach to nonlinear functional expansions*, *IEEE Trans. Circuits and Systems* **30** (1983), p. 554-570.
- [20] S. Fomin et A. N. Kirillov, *The Yang-Baxter equation, symmetric functions, and Schubert polynomials*, *Proceedings of the 5th Conference on formal power series and algebraic combinatorics* (Florence, 1993) : *Discrete Math.* **153** (1996), p. 123-143.
- [21] W. Fulton, *Young tableaux*, Cambridge University Press, 1999.

- [22] I. Gessel et X. G. Viennot, *Binomial determinants, paths, and hook length formulae*, Adv. in Math. **58** (1985), p. 300-321.
- [23] F. M. Goodman, P. de la Harpe et V. F. R. Jones, *Coxeter graphs and towers of algebras*, Mathematical Sciences Research Institute Publications **14**, Springer-Verlag, New York, 1989.
- [24] D. Gouyou-Beauchamps et X. G. Viennot, *Equivalence of the two-dimensional directed animal problem to a one-dimensional path problem*, Adv. Appl. Math. **9** (1988), p. 334-357.
- [25] L. Habsieger, M. Kazarian et S. Lando, *On the second number of Plutarch*, Amer. Math. Monthly **105** (1998), n° 5, p. 446.
- [26] E. H. Ismail, D. Stanton et X. G. Viennot, *The combinatorics of  $q$ -Hermite polynomials and the Askey-Wilson integral*, Europ. J. of Combinatorics **8** (1987), p. 379-392.
- [27] V. E. Korepin, N. M. Bogoliubov and A. G. Izergin, *Quantum inverse scattering method and correlation functions*, Cambridge Monographs on Mathematical Physics, Cambridge University Press, 1993.
- [28] S. Karlin et J. McGregor, *Coincidence probabilities of birth and death processes*, Pacific J. Math. **9** (1959), p. 1109-1140.
- [29] S. Karlin et J. McGregor, *Coincidence probabilities*, Pacific J. Math. **9** (1959), p. 1141-1164.
- [30] G. Kuperberg, *Another proof of the alternating sign matrix conjecture*, Int. Math. Res. Notices year 1996, n° 3, p. 139-150.
- [31] F. Lamnabhi-Lagarigue et M. Lamnabhi, *Algebraic computation of the solution of some nonlinear differential equations*, Computer algebra (Marseille, 1982) : p. 204-211 de Lecture Notes in Comput. Sci. **144**, Springer, Berlin-New York, 1982.
- [32] A. Lascoux et P. Pragacz, *Operator calculus for  $\tilde{Q}$ -polynomials and Schubert polynomials*, Adv. Math. **140** (1998), no 1, p. 1-43.
- [33] A. Lascoux et P. Pragacz, *Orthogonal divided differences and Schubert polynomials,  $\tilde{P}$ -functions, and vertex operators*, Mich. Math. J. **48** (2000), spec. vol., p. 417-441.
- [34] A. Lascoux et M.-P. Schützenberger, *Le monoïde plaxique*, Noncommutative structures in algebra and geometric combinatorics (Naples, 1978), Quad. « Ricerca Sci. » **109**, CNR, Rome, 1981 : p. 129-156.
- [35] P. Leroux et X. G. Viennot, *A combinatorial approach to nonlinear functional expansions : an introduction with an example*, Theoretical Comp. Science **79** (1991), p. 179-193.
- [36] D. E. Littlewood, *The theory of group characters and matrices representations of groups*, Oxford, 1950 (2<sup>e</sup> édition).
- [37] I. G. Macdonald, *Notes on Schubert Polynomials*, Publ. LACIM, UQAM, Montréal, 1991.
- [38] L. Manivel, *Fonctions symétriques, polynômes de Schubert et lieux de dégénérescence*, Cours spécialisés n° 3, Soc. Math. France, 1998.

- [39] W. H. Mills, D. P. Robbins et H. Rumsey Jr, *Proof of the Macdonald conjecture*, Invent. Math. **66** (1982), p. 73-87.
- [40] W. H. Mills, D. P. Robbins et H. Rumsey Jr, *Alternating sign matrices and descending plane partitions*, J. Combin. Theory Ser. A **34** (1983), p. 340-359.
- [41] M. Petkovsek, H. Wilf et D. Zeilberger,  $A = B$ , publ. A. K. Peters, Ltd. Wellesley, Mass, 1996. Téléchargeable sur [http ://www.cis.upenn.edu/~wilf/AeqB.html](http://www.cis.upenn.edu/~wilf/AeqB.html)
- [42] D. P. Robbins, *The story of 1, 2, 7, 42, 429, 7436, ...* Math. Intell. **13**, n° 2 (1991), p. 12-19.
- [43] D. P. Robbins et H. Rumsey Jr, *Determinants and alternating sign matrices*, Adv. in Math. **62** (1986), p. 169-184.
- [44] M.-P. Schützenberger, *La correspondance de Robinson*, p. 59-113 de : Combinatoire et représentation du groupe symétrique (Actes Table Ronde CNRS, Univ. Louis-Pasteur, Strasbourg, 1976), Lecture Notes in Math. **579**, Springer, Berlin, 1977.
- [45] R. P. Stanley, *Hipparchus, Plutarch, Schroeder and Hough*, Amer. Math. Monthly **104**, N° 4 (1997), p. 344-350.
- [46] R. P. Stanley, *Enumerative combinatorics*, Cambridge University Press, vol. 1 (1986, 1997, 2000) et vol. 2 (1999, 2000).
- [47] J. R. Stembridge, *Nonintersecting paths, pfaffians, and plane partitions*, Adv. Math. **83** (1990), p. 96-113.
- [48] X. G. Viennot, *Une interprétation combinatoire des coefficients des développements en série entière des fonctions elliptiques de Jacobi*, J. Combin. Theory A **29** (1980), p. 121-133.
- [49] X. G. Viennot, *Interprétations combinatoires des nombres d'Euler et de Genocchi*, Séminaire de Théorie des Nombres, exposé n° 11, janvier 1981, Université Bordeaux 1, 94 pages.
- [50] X. G. Viennot, *Problèmes combinatoires posés par la physique statistique*, Séminaire Bourbaki n° 626, février 1984 ; Astérisque **121-122**, Soc. Math. France, 1985 : p. 225-246.
- [51] X. G. Viennot, *Heaps of pieces, I : Basic definitions and combinatorial lemmas* : p. 321-325 de *Combinatoire énumérative*, éd. G. Labelle et P. Leroux, Lecture Notes in Math. n° 1234, Springer-Verlag, Berlin, 1986.
- [52] D. Zeilberger, *Proof of the alternating sign matrix conjecture*, J. Comb. **3**, n° 2 (1996), p. 283-366.