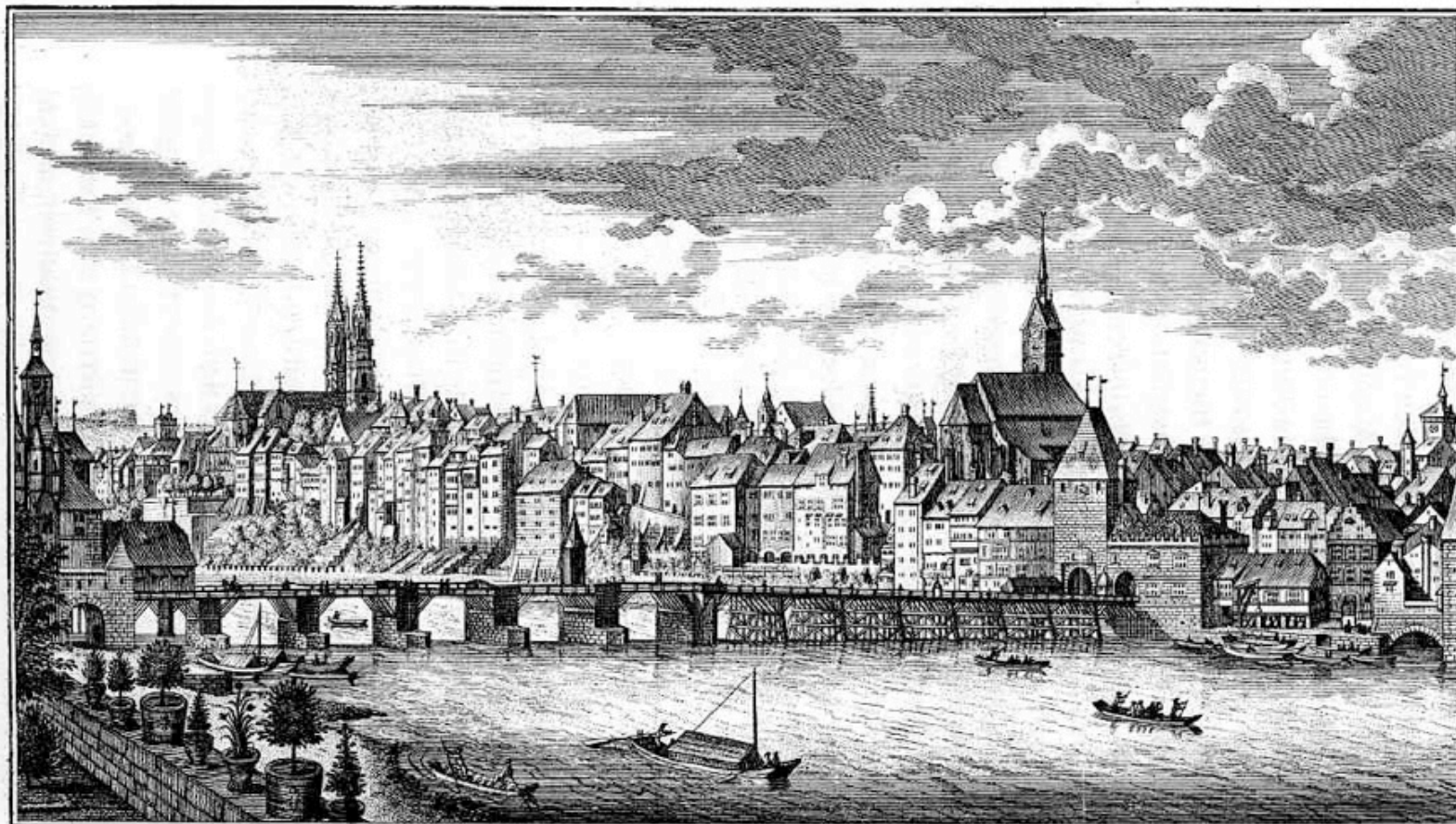


D'une lettre oubliée d'Euler
(1707 - 1783)
à la combinatoire et
à la physique contemporaine

Xavier Viennot
CNRS, LaBRI,
Université Bordeaux I

avec Mariette Freudentheil,
Gérard H.E. Duchamp (violons)
et Marcia Píg Lagos (textes)

Bâle 1707 - 1727



PROSPECT DER RHEINBRÜCKE ZU BASEL
VON SEITEN DER KLEINEN STADT.

En. Büchel del. 1761.



VUE DU PONT DU RHIN DE BASLE
DU CÔTÉ DE LA PETITE VILLE.

W. Hoorlberg exc. Cum Priv.



Jakob I Bernoulli
(1654 - 1705)

peinture par Niklaus Bernoulli

Johann I Bernoulli
(1667 - 1748)





Niklaus II Bernoulli
(1695 - 1726)



Daniel I Bernoulli
(1700 - 1782)

Q. F. F. Q. S.
DISSERTATIO PHYSICA
DE SONO,

QUAM
ANNUENTE NUMINE DIVINO
JUSSU MAGNIFICI ET SAPIENTISSIMI PHI-
LOSOPHORUM ORDINIS

PRO
VACANTE PROFESSIONE PHYSICA

Ad d. 18. Febr. A. MDCCXXVII.

In Auditorio Juridico hora 9.

Publico Eruditorum Examine subjicit

LEONHARDUS EULERUS

A. L. M.

Respondente

Præstantissimo Adolescente

ERNESTO LUDOVICO BURCARDO

Phil. Cand.



BASILEÆ,

Typis E. & J. R. THURNISIORUM, Fratrum.



Gottfried von Leibnitz
1646 - 1716



Issac Newton
1643 - 1727

Johann I Bernoulli
(1667 - 1748)



Prince des Mathématiques

18^{ème} siècle

Le siècle des Lumières



Monsieur de Voltaire
1694 - 1778



Gabrielle Emilie
Le Tonnelier de Breteuil
Marquise du Châtelet
1706 - 1749

DE L'ESPRIT DES LOIX

*OU DU RAPPORT QUE LES LOIX DOIVENT AVOIR AVEC LA CON-
STITUTION DE CHAQUE GOUVERNEMENT, LES MOEURS,
LE CLIMAT, LA RELIGION, LE COMMERCE, &c.*

à quoi l'Auteur a ajouté

*Des recherches nouvelles sur les Loix Romaines touchant les
Successions, sur les Loix Françoises, & sur les Loix Féodales.*

TOME PREMIER.



A GENEVE,
Chez BARRILLOT & FILS.

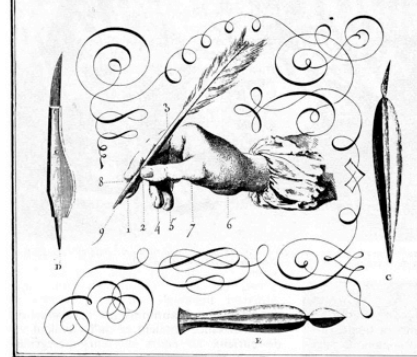




Denis Diderot
1713 - 1784



Jean Le Rond d'Alembert
1717 - 1783



Art d'Ecrire.

Benard Peint.

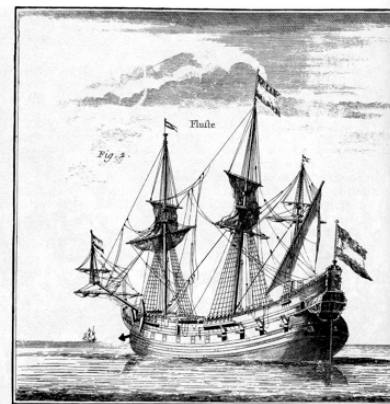
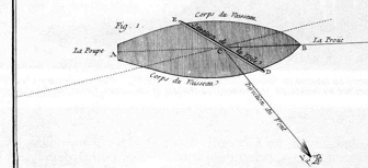
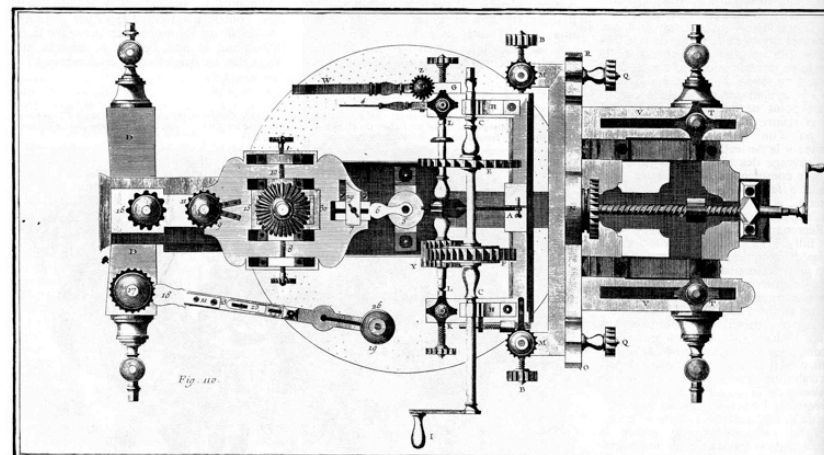


Figure pour expliquer ce que c'est que la Dérive et comment on la peut connaître. Voyez le mot Vaisse.

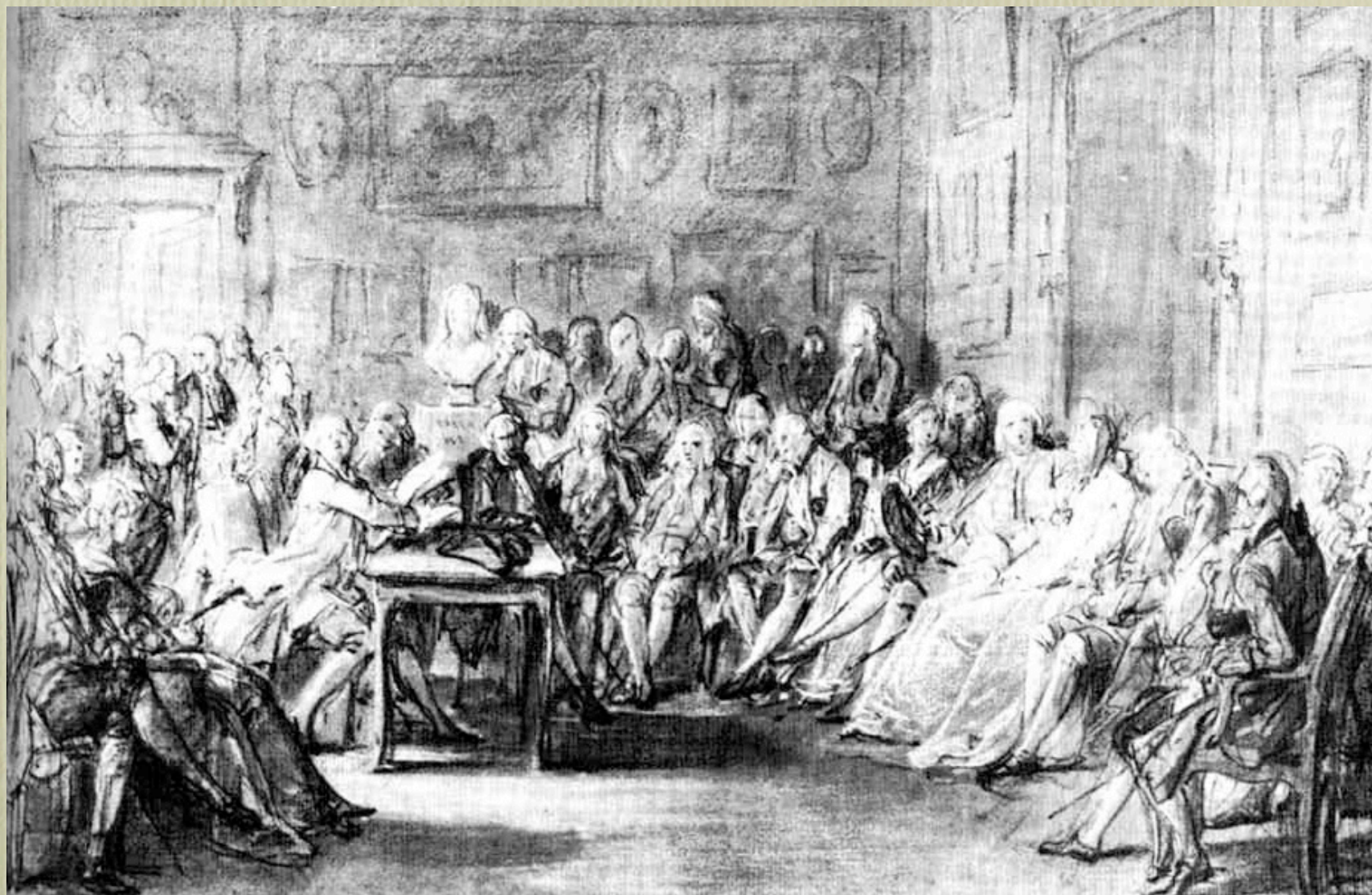


Marine, Bâtimement appelé Fluile.

Sur les Vaisseaux de M^r de la Marine.



Horlogerie,
Plan de la Machine de Sully pour fonder les Roues



Europe scientifique

Académies

Leonhard
Euler

30 ans



Opera Omnia, 80 volumes

Eneström E001, E800
40 livres

correspondance 3000 lettres

mathématiques, physique,
optique, mécanique, astronomie,
sciences et techniques, “ingénierie”,
navigation, géographie, musique

grand pédagogue

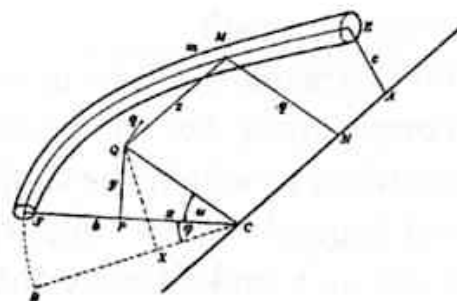


Fig. 1

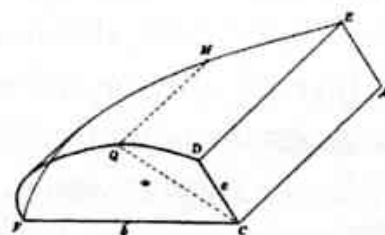


Fig. 2

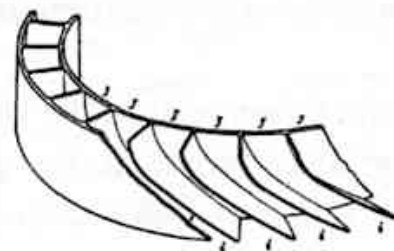


Fig. 4

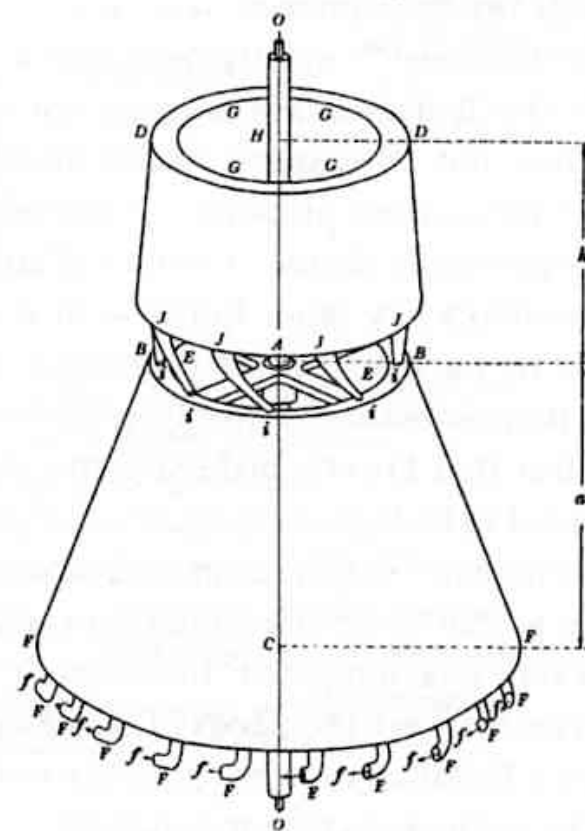


Fig. 3

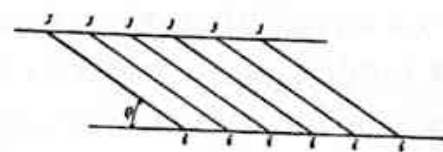
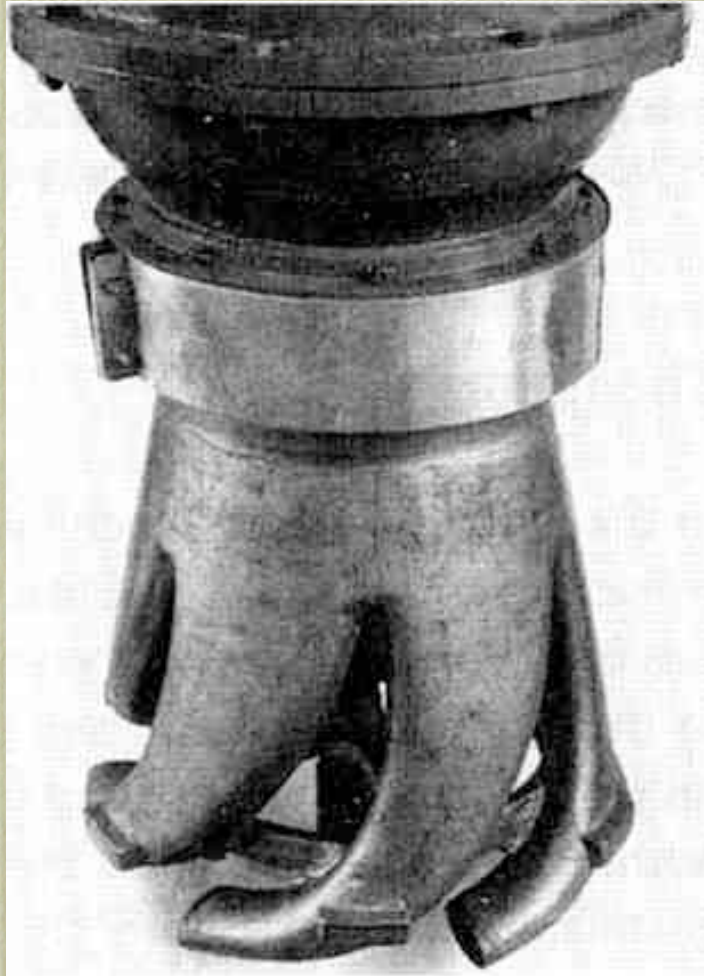


Fig. 6



Le "phénomène Euler"



Leonh. Euler 300

300. Geburtstag

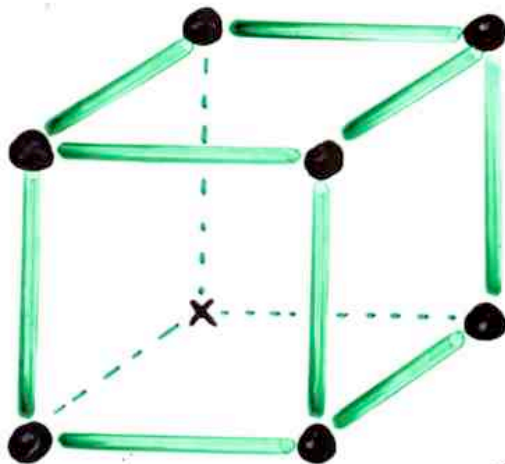
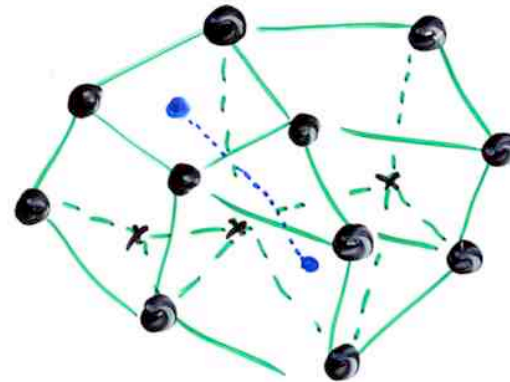
300^{ème} anniversaire

300° anniversario

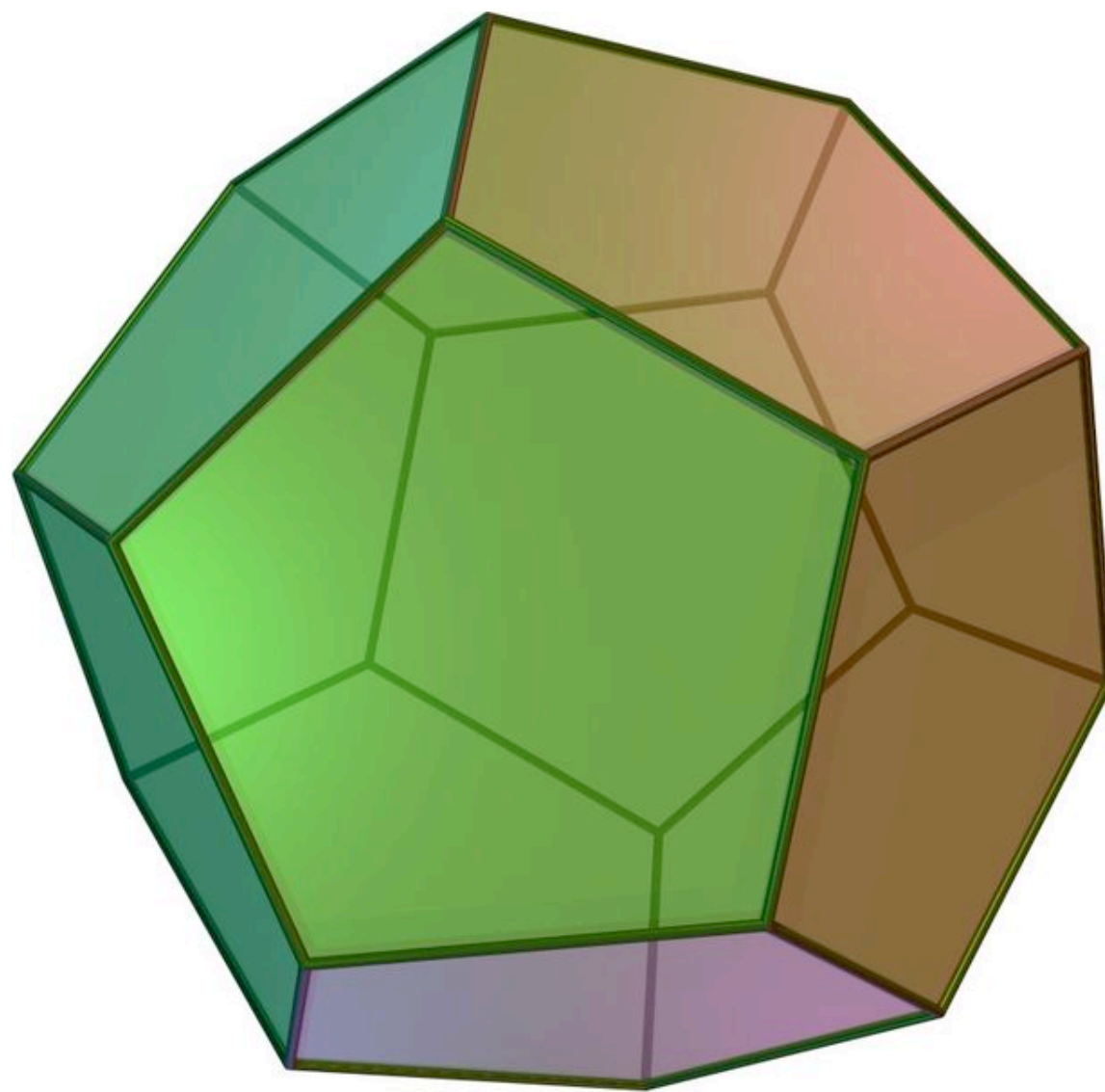
300th anniversary



Polyèdre convexe



$$S - A + F =$$
$$8 - 12 + 6 = 2$$



DOCTRINAE SOLIDORVM M. 119

hedrarum ponatur $= H$, neque hic numerus H neque numerus S maior esse potest quam $\frac{2}{3} A$.

PROPOSITIO IV.

§. 33. *In omni solido hedris planis incluso aggregatum ex numero angulorum solidorum et ex numero hedrarum binario excedit numerum acierum.*

DEMONSTRATIO.

Scilicet si ponatur ut hactenus:
 numerus angulorum solidorum $= S$
 numerus acierum - - - - $= A$
 numerus hedrarum - - - $= H$
 demonstrandum est, esse $S + H = A + 2$.

topologie combinatoire

invariant

$$S - A + F - 2$$

"stéréométrie"

$$e^{i\pi} + 1 = 0$$

Saint - Pétersbourg 1727 - 1741



Daniel Bernoulli
1700-1782



Pierre Ier Le Grand
1672 - 1725



Leonhard
Euler
30 ans



“analyse combinatoire”

"analyse combinatoire"

combinatoire "classique"

probabilités ensembles finis

coefficients binomiaux

jeux, loteries

"Sur l'avantage du banquier au jeu
de Pharaon"

"Sur la probabilité des séquences dans
la loterie génoise"

"Sur les rentes viagères"

"Calcul de la probabilité dans le
jeu de rencontre"

d_n nombre de dérangements
ayant n éléments

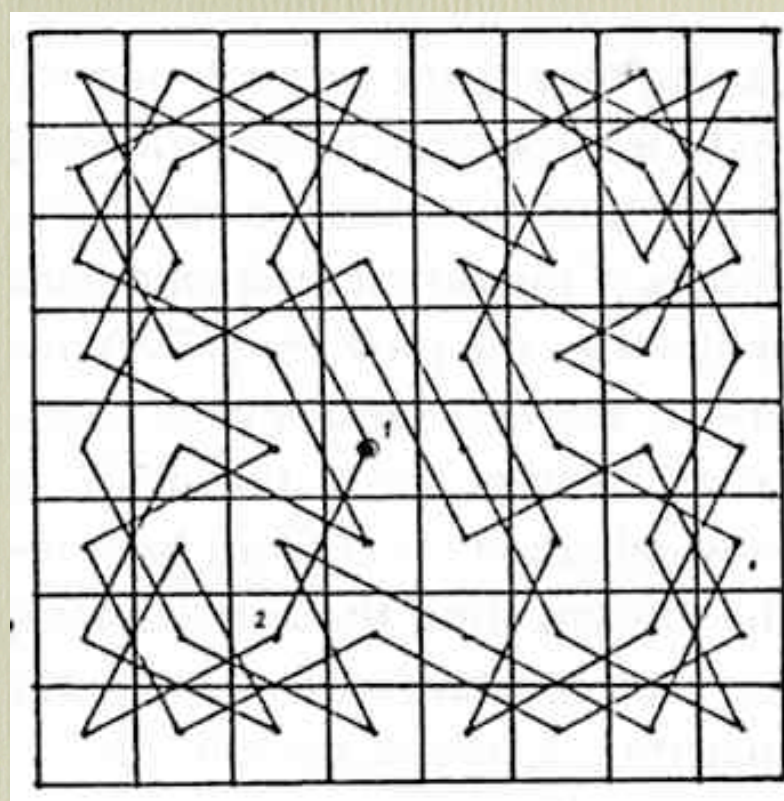
permutation $\sigma = (1, 2, 3, \dots, n)$
 $(\sigma(1), \dots, \sigma(n))$

sans point fixe $\sigma(i) \neq i$

$$d_n = n! \left(1 + \sum_{1 \leq i \leq n} \frac{(-1)^i}{i!} \right)$$

$$\frac{d_n}{n!} \rightarrow \frac{1}{e}$$

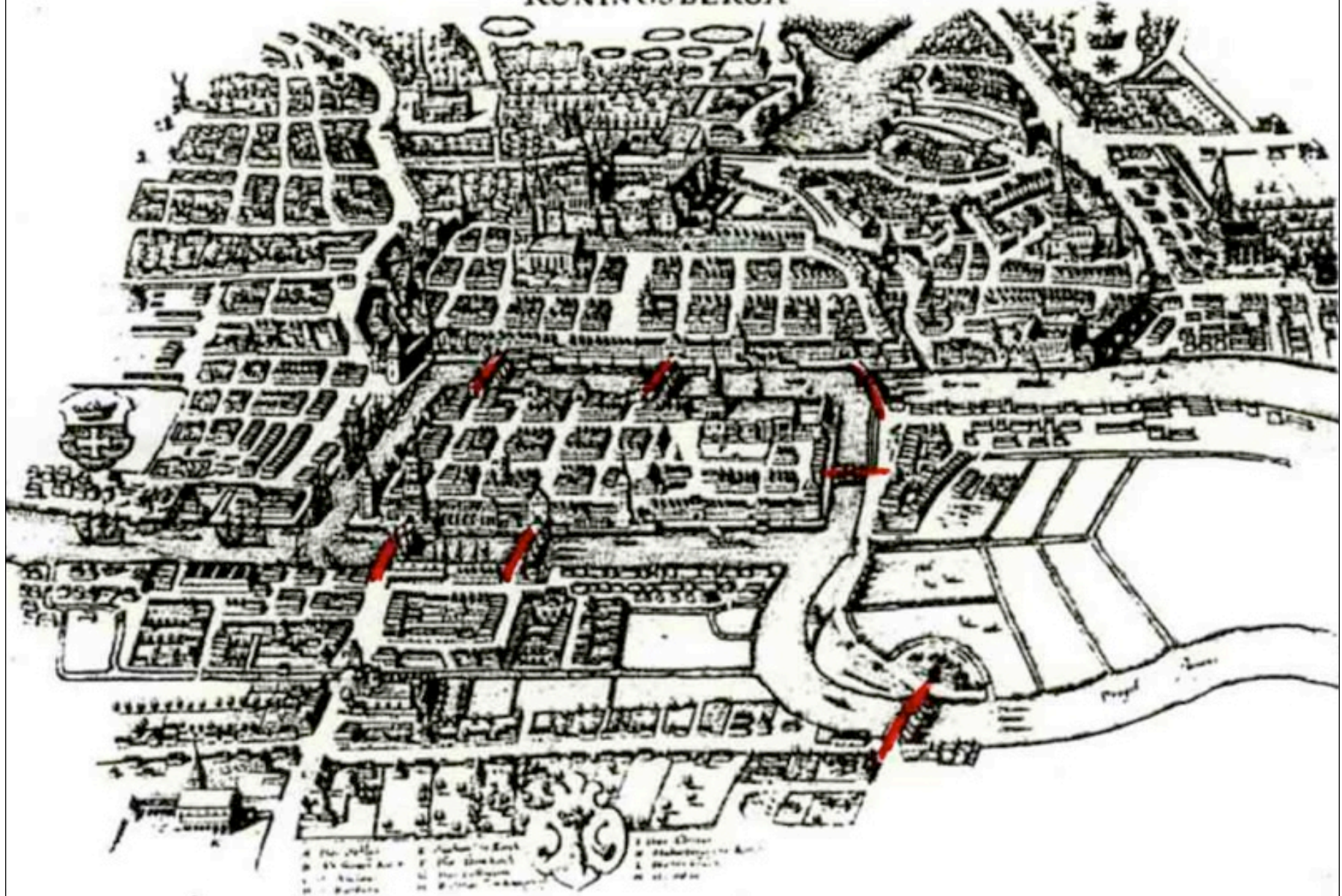
50	11	24	63	14	37	26	35	260
23	62	51	12	25	34	15	38	260
10	48	64	31	40	13	36	29	260
01	22	9	52	33	28	39	16	260
48	7	60	1	20	41	54	29	260
59	4	45	8	53	32	17	42	260
6	47	2	57	44	19	30	55	260
3	58	5	46	31	56	43	18	260
260	260	260	260	260	260	260	260	260

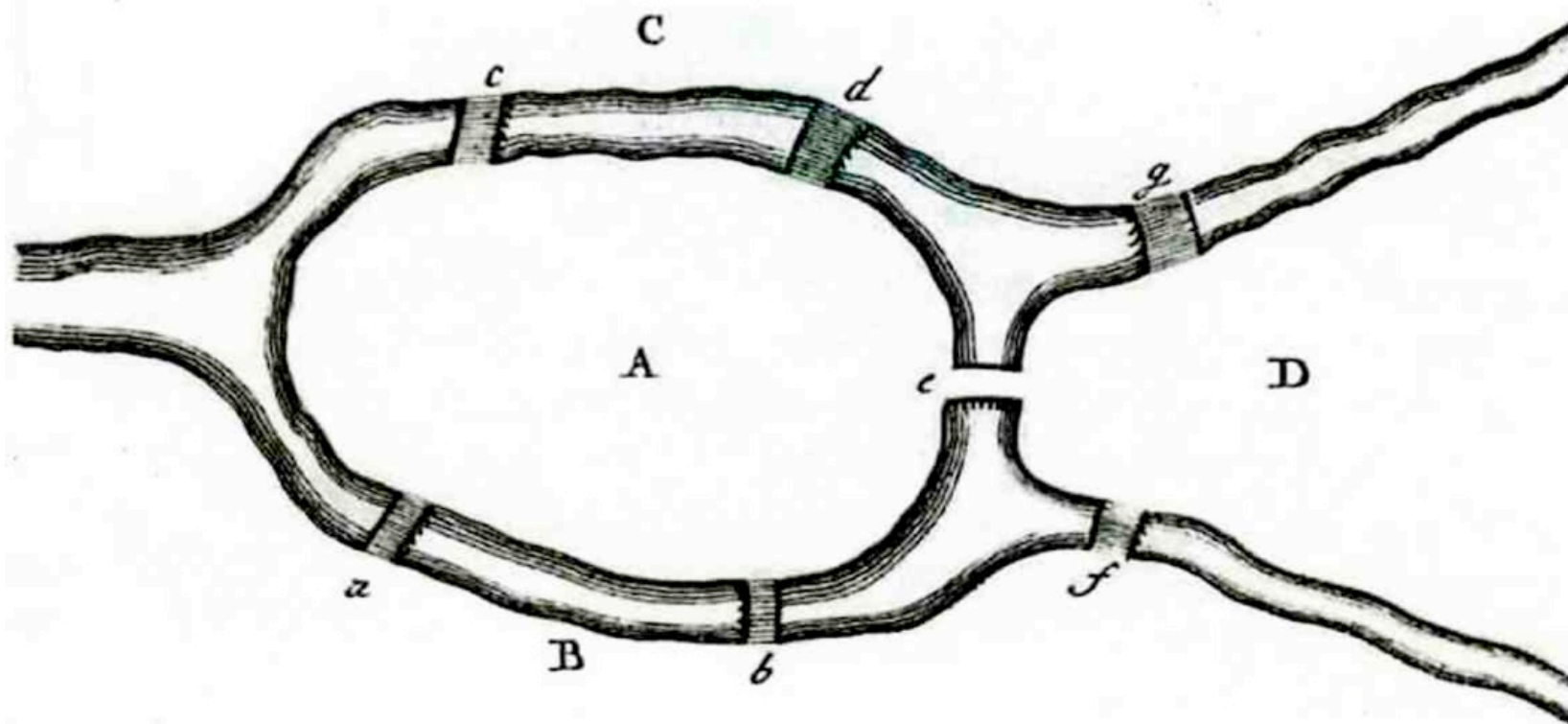


"théorie des graphes"

- chemin Hamiltonien
(circuit)
- problème des ponts de Königsberg
chemin eulérien
(circuit)

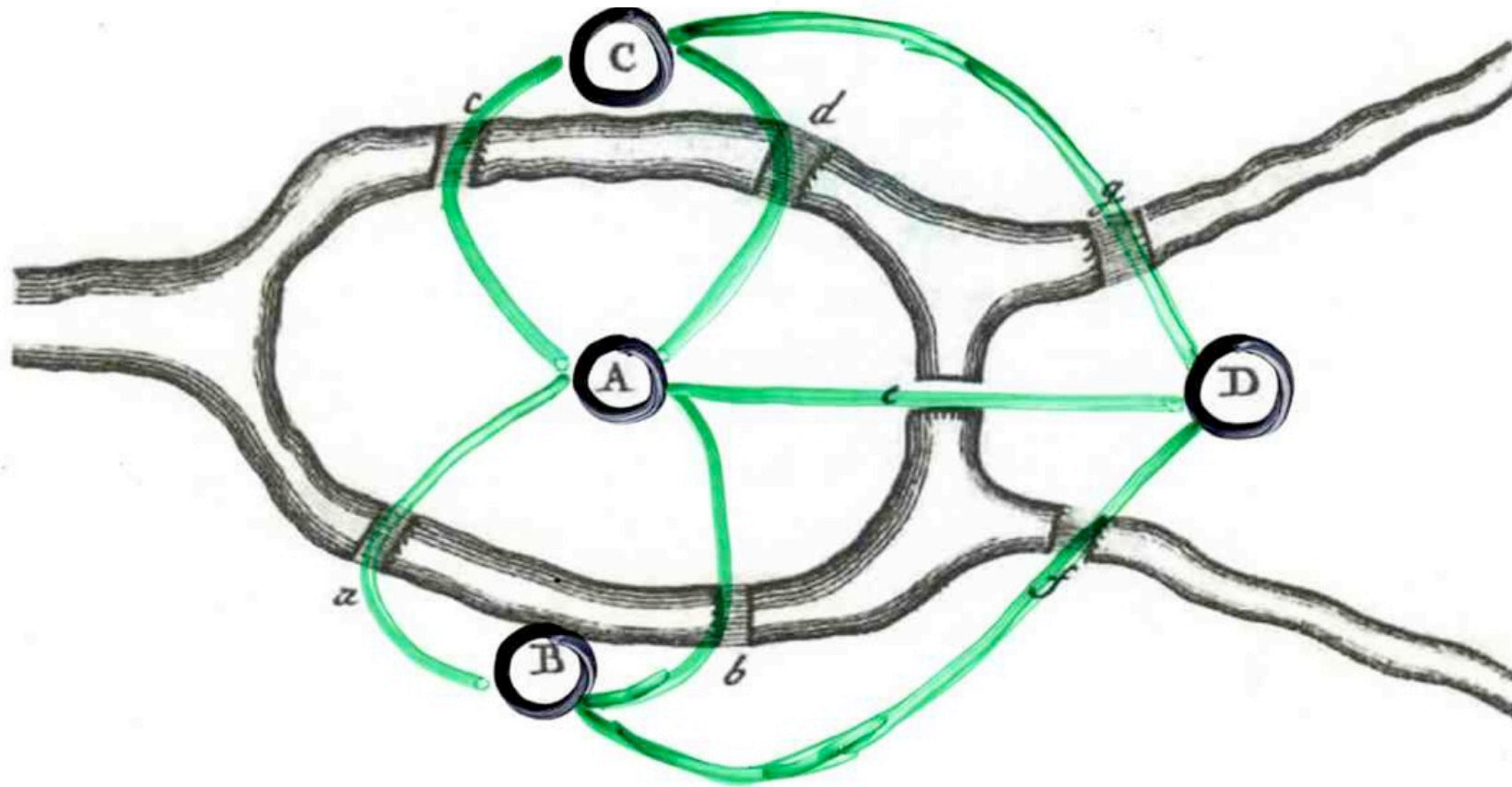
KONINGSBERGA





géométrie "de position"

"Solutio problematis ad geometriam
situs pertinentis"



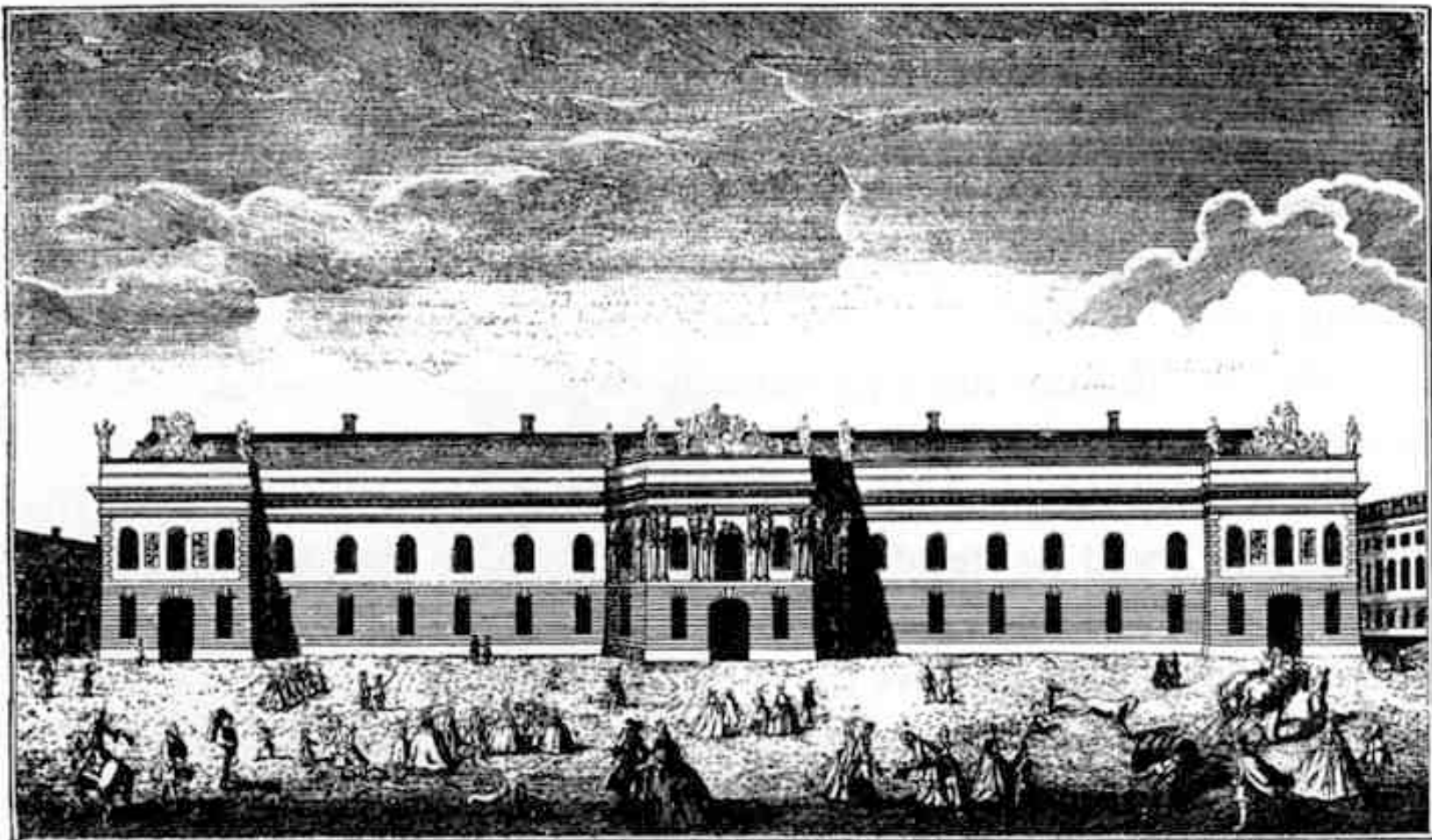
Carre's magiques
problème des 36 officiers

"problèmes delectables ou amusants"

Berlin 1741 - 1766



Frederick II de Prusse
(1712 - 1786)



Prospekt der vor einigen Jahren abgebrannten, und nunmehr ganz neu aufgeführten Föhrer-Gebäude des großen Königl. Stalls auf der Dorotheen-
Stadt in Berlin, welches überaus ansehnliche Gebäude für die Königl. Academie der Wissenschaften und freyen Künste, und für die Academie der Poesie und
mathematischen Wissenschaften bestimmt ist.

123. Die Akademie der Wissenschaften. 1752

Nach einem Stiche von Schlenker



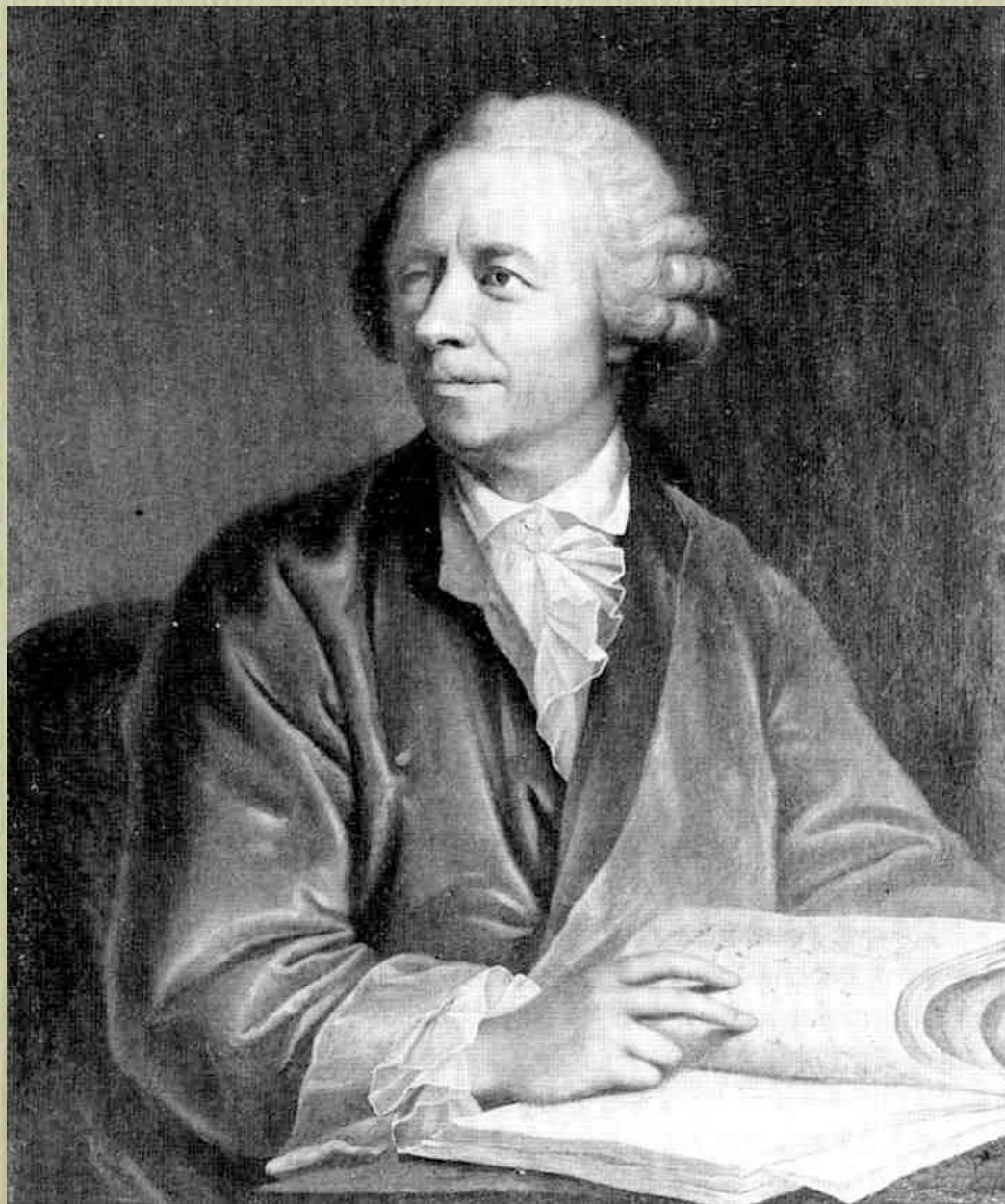
Pierre de Maupertuis
1698 - 1759



Frederick II de Prusse
(1712 - 1786)



Leonhard
Euler
46 ans



Leonhard
Euler
49 ans

LETTRES
A UNE PRINCESSE
D'ALLEMAGNE
SUR DIVERS SUJETS
de
PHYSIQUE & de PHILOSOPHIE

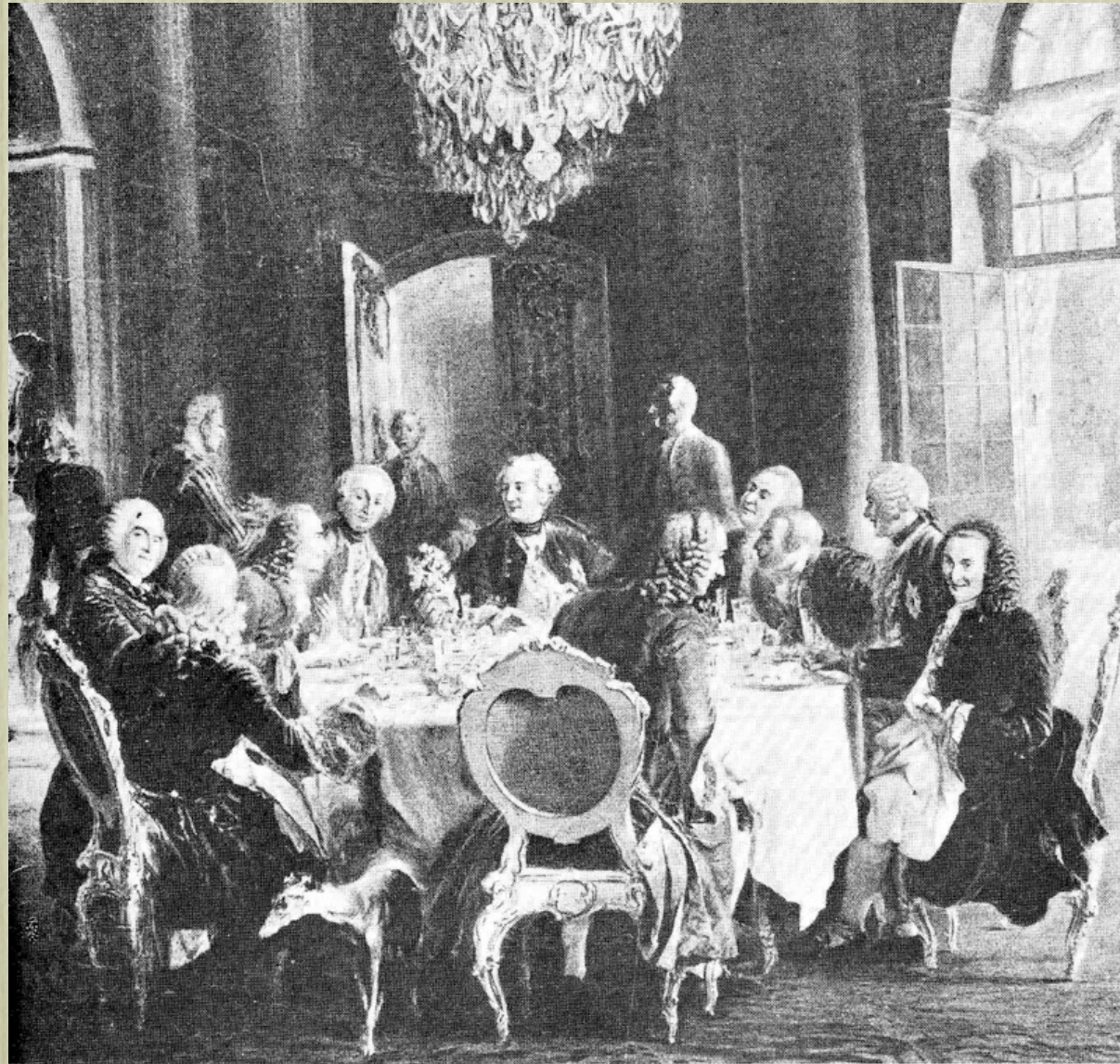
TOME PREMIER



•
A SAINT PETERSBOURG
de l'Imprimerie de l'Académie Impériale des Sciences
M DCC LX VIII.

Leonhard
Euler
49 ans (?)





Une lettre oubliée d'Euler
à Christian Goldbach

Berlin, 4 Septembre 1751

Summe 5 x 10
 unter beliebigen Summa 5 x 10
 werden kann.

Es ist die quatuor quadrata $aa+bb+cc+dd$ so zu finden
 Das $a+b+c+d=2$ ist

$$aa+bb+cc+dd = (a+b-1)^2 + (a+c-1)^2 + (b+c-1)^2 + 1$$

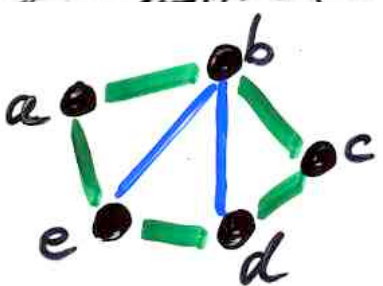
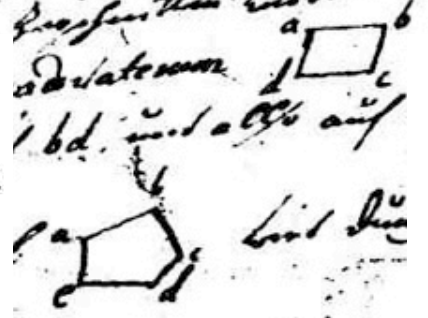
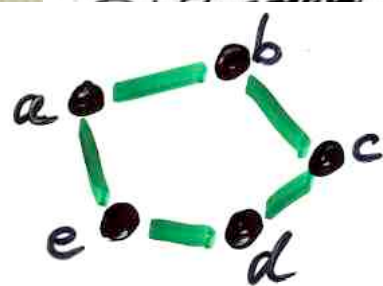
folgt ist $aa+bb+cc+dd-1$ in 3 quadrata resolvable.

In $8n+3$ in 3 quadrata resolvable, kann man
 $8n+3 = (a+b-1)^2 + (a+c-1)^2 + (b+c-1)^2$ so wird

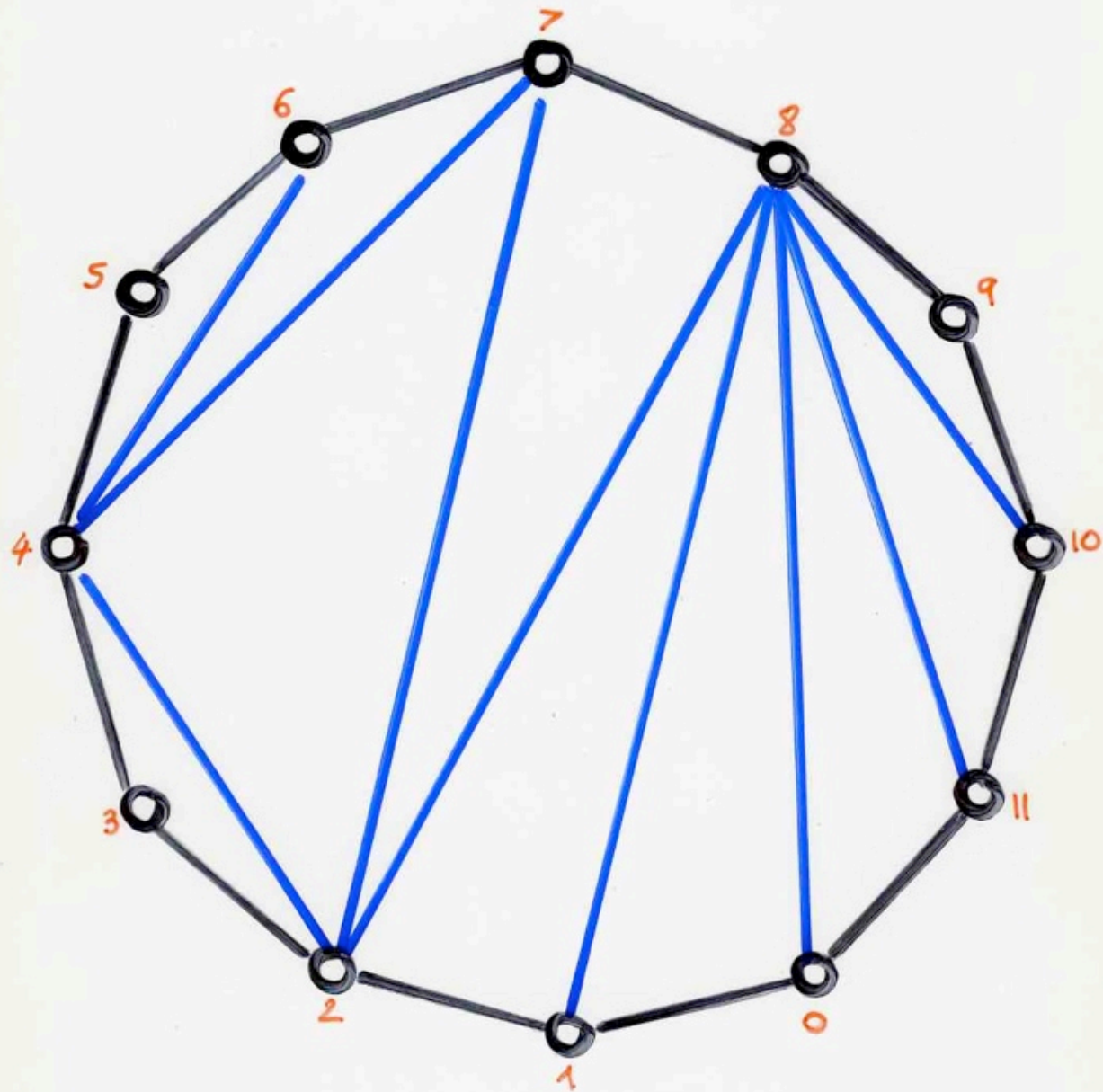
$$8n+3 = aa+bb+cc+dd$$

Das ist die in 3 quadrata resolvable. Das ist die
 aus dem Theoreme hervorgeht. Das ist die

aus dem Theoreme hervorgeht. Das ist die
 aus dem Theoreme hervorgeht. Das ist die



Die Diagonalen
 Triangula ist.



Geht, und setzt man auf 8 nach folgenden Seiten geschoben und findet
 Summe der Diagonalen I. 22; II. 88; III. 22; IV. 22; V. 88

Man hat nun Summe der 2 Diagonalen in 4 Triangula
 Summe und findet man auf 14 nachfolgenden Seiten geschoben

Man ist in Folge Generaliten. In ein Polygonum von n Seiten
 Summe $n-3$ Diagonalen in $n-2$ Triangula zerlegt werden kann, auf

bei beliebig beschriebenen Seiten, selbst geschoben können.

Es ist nun die Aufgabe diese beschriebenen Seiten = x

so sehr ist per Induktion gefunden

Man $n = 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10$

ist $x = 1, 2, 5, 14, 42, 152, 429, 1430$

Es ist nun die Aufgabe diese beschriebenen Seiten = x

so sehr ist per Induktion gefunden

$$x = \frac{2 \cdot 6 \cdot 10 \cdot 14 \cdot 18 \cdot 22 \cdot \dots \cdot (2n-10)}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot \dots \cdot (n-1)} \text{ oder } x = \frac{(2n-10)!}{(n-1)!}$$

$$1 = \frac{2}{2}, 2 = 1 \cdot \frac{6}{3}, 5 = 2 \cdot \frac{12}{4}, 14 = 5 \cdot \frac{18}{5}, 42 = 14 \cdot \frac{24}{6}, 152 = 42 \cdot \frac{30}{7}$$

Es ist nun die Aufgabe diese beschriebenen Seiten = x

so sehr ist per Induktion gefunden

Es ist nun die Aufgabe diese beschriebenen Seiten = x

$$1 + 2 + 5 + 14 + 42 + 152 + 429 + 1430 + \dots = \frac{1-2n-\sqrt{1-4n}}{2n}$$

$$\text{alle } n \text{ wenn } a = \frac{1}{n} \text{ ist } 1 + \frac{2}{n} + \frac{5}{n^2} + \frac{14}{n^3} + \frac{42}{n^4} + \dots = 1$$

Es ist nun die Aufgabe diese beschriebenen Seiten = x

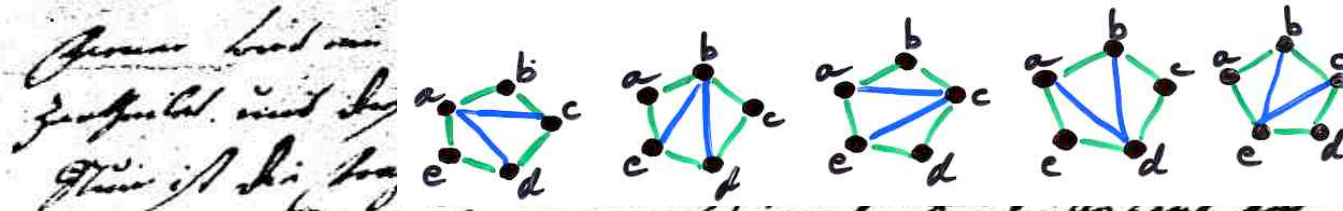
so sehr ist per Induktion gefunden

Es ist nun die Aufgabe diese beschriebenen Seiten = x

Seite 24. Sept
 1751.

gezeichnet von
 Euler

Geht, und daher hier auf 8 mögl. Verbindungen haben gegeben werden
 durch die Diagonale I. $\overset{a}{\underset{d}{\parallel}}$; II. $\overset{b}{\underset{e}{\parallel}}$; III. $\overset{c}{\underset{f}{\parallel}}$; IV. $\overset{a}{\underset{e}{\parallel}}$; V. $\overset{b}{\underset{f}{\parallel}}$



durch $n-3$ Diagonale in $n-2$ Triangula gegeben werden, an
 bei beliebig bestimmter Reihenfolge gegeben werden.
 Folglich sind die Anzahl dieser Verbindungen $= x$

Wenn $n = 1, 2, 5, 14, 42, 132, 429, 1430, \dots$

ist $x = 1, 2, 5, 14, 42, 132, 429, 1430, \dots$
 Hieraus sieht man den Zusammenhang. In generaliter
 gilt

$$x = \frac{2 \cdot 6 \cdot 10 \cdot 14 \cdot 18 \cdot 22 \cdot \dots \cdot (4n-10)}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot \dots \cdot (n-1)} = \frac{(2n)!}{(n+1)! n!}$$

$$C_n = \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n}$$

$$n! = 1 \times 2 \times 3 \times \dots \times n$$

$$1 + 2a + 5a^2 + 14a^3 + 42a^4 + 132a^5 + \text{etc}$$

$$\frac{1 - 2a - \sqrt{1 - a^2}}{2a^2}$$

$$1 + 2a + 5a^2 + 14a^3 + 42a^4 + 132a^5 + \text{etc} = \frac{1 - 2a - \sqrt{1 - a^2}}{2a^2}$$

$$\text{all. wenn } a = \frac{1}{4} \text{ ist } 1 + \frac{2}{4} + \frac{5}{16} + \frac{14}{64} + \frac{42}{256} + \text{etc} = 1$$

Die hier erwähnte Reihe ist für die
 vollständige Aufbegriff der
 W. für die L. mit der Stellung der
 Reihenfolge zu bezeichnen

$$a = \frac{1}{4}$$

von Joseph Euler

4 Sept
 1751.

4 Sept 1751
 Berlin

Joseph Euler

séries formelles

algèbre des polynômes

$$(1+t)^2 = 1 + 2t + t^2$$

$$(1+t)^3 = 1 + 3t + 3t^2 + t^3$$

$$1 + 1t + 2t^2 + 5t^3 + 14t^4 + 42t^5$$

+ ...

série génératrice
des nombres C_n

série formelle

$$y = 1 + 1t + 2t^2 + 5t^3 + 14t^4 + \dots + C_n t^n + \dots$$

série génératrice des
nombres de Catalan C_n

$$y = 1 + ty^2$$

equation algébrique

St. Petersburg d. 16. October 1751.

Aus Ew. werthem Schreiben vom 4. Sept. habe ich mit Vergnügen die leichte legem progressionis von

$$1 + 2a + 5aa + 14a^3 + \text{etc.}$$

ersehen. Wenn mir wäre aufgegeben worden die coëfficien-
tes incognitos b, c, d etc. in serie

$$A \dots 1 + ba + caa + da^3 + ea^4 + \text{etc.} = \frac{1 - 2a - \sqrt{1 - 4a}}{2aa}$$

zu determiniren, so würde ich die Solution kaum unter-
nommen haben, da ich aber diese coëfficien-tes bereits ex-
primiret gesehen, so habe ich zwey Methoden zur Solution
gefunden: 1. Weil aus der summa $\frac{1 - 2a - \sqrt{1 - 4a}}{2aa} = A$
folget, dass $1 + aA = A^{\frac{1}{2}}$, oder dass

recurrence

$$C_{n+1} = \sum_{i+j=n} C_i C_j$$

$$C_0 = 1$$

$$y = \frac{1 - (1 - 4t)^{1/2}}{2t}$$

$$(1+u)^m =$$

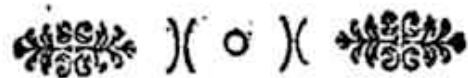
$$1 + \frac{m}{1!} u + \frac{m(m-1)}{2!} u^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{3!} u^3 +$$

+ ...

$$m = \frac{1}{2}$$

$$u = -4t$$

$$C_n = \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n}$$



205

DE

SERIEBVS DIVERGENTIBVS.

Auctore LEON. EKLERO.

§. I.

Cum series conuergentes ita definiantur, vt constant terminis continuo decrescentibus, qui tandem, si series in infinitum processerit penitus euanescent; facile intelligitur, quarum serierum termini infinitesimi non in

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \frac{x^4}{1-x}$$

&c.

qui ergo dicere vellet huius seriei finitae $1 + x + x^2 + x^3$
 summam esse $\frac{1}{1-x}$, is erraret a vero quantitate $\frac{x^4}{1-x}$:

& qui summam huius seriei

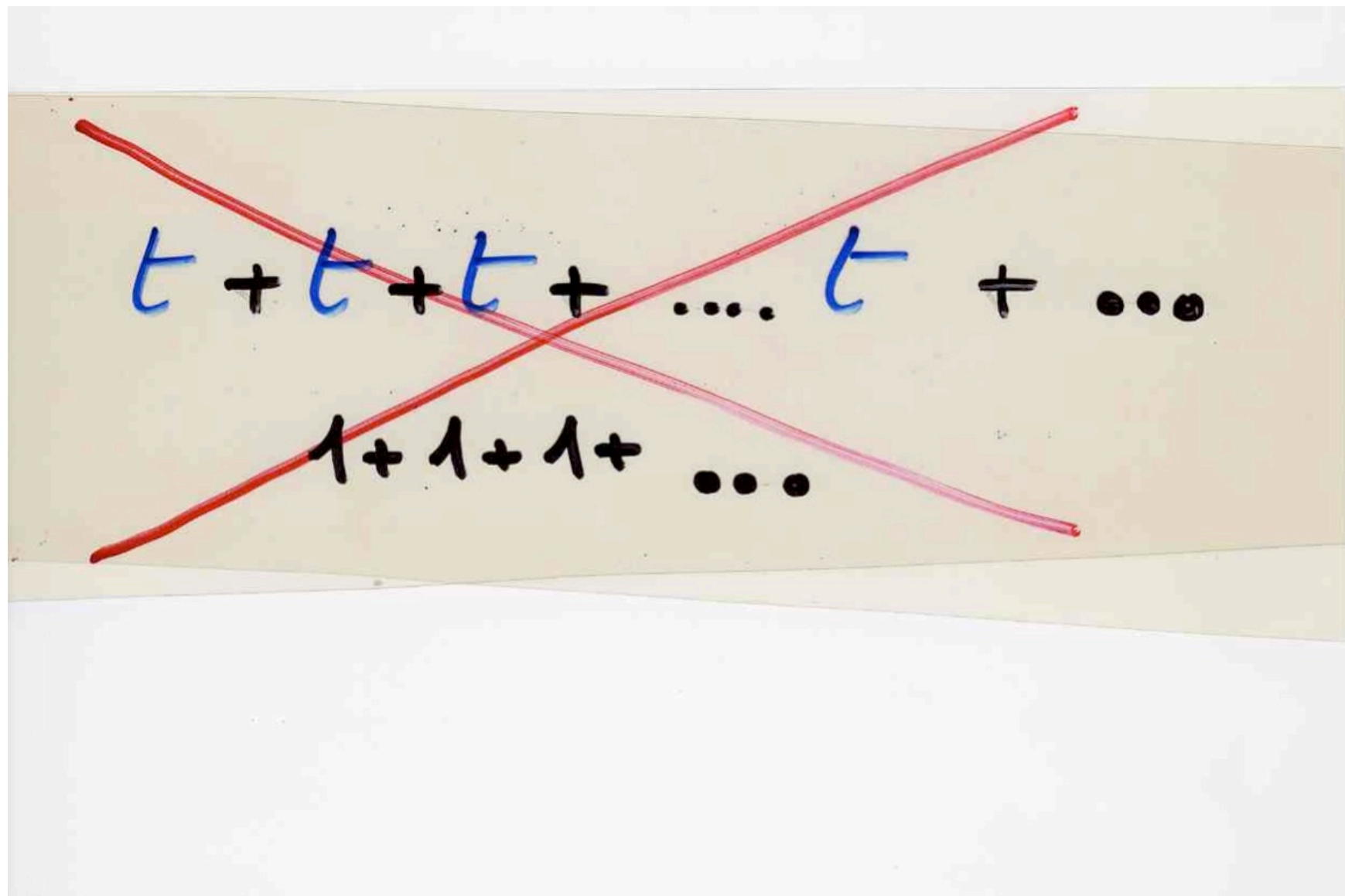
$$1 + x + x^2 + x^3 + \dots + x^{1000}$$

statuere vellet $= \frac{1}{1-x}$, is erraret quantitate $\frac{x^{1001}}{1-x}$

qui error si x sit numerus unitate maior, foret maximus.

$$t + t + t + \dots t + \dots$$

$$1 + 1 + 1 + \dots$$





Johann von Segner

1704 - 1777

NOVI
COMMENTARII
ACADEMIAE SCIENTIARVM
IMPERIALIS
PETROPOLITANAE

TOM. VII.

pro Annis MDCCLVIII. et MDCCLIX.



MDCCCLXII

PETROPOLI

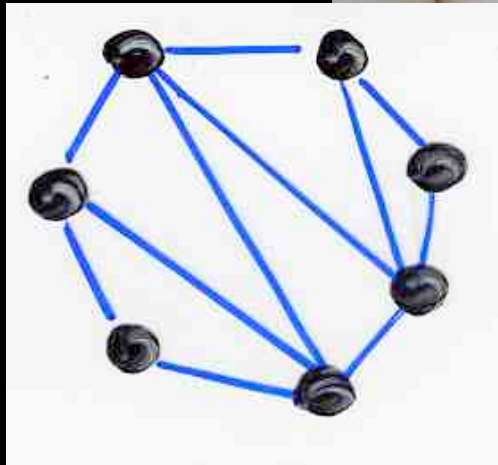
TYPIS ACADEMIAE SCIENTIARVM

MDCCLXI.

ENUMERATIO
MODORVM QVIBVS FIGVRAE
PLANAE RECTILINEAE PER DIAGONALES
DIVIDVNTVR IN TRIANGVLA.

Auctore

TOH. ANDR. DE SEGNER.



Triangulum per diagonalem in alia solui non posse, utpote quod ex se ipso vno tantum modo componitur, notum est: quadrilaterum autem ita diuidi duplicem in modum posse, mox apparet. Neque difficulter perspicitur, modos, quibus quinque laterum figura per diagonales in triangula soluitur, quinque esse, quorum quilibet discrepat ab altero. Sex autem, vel plurium laterum figurae, quot modis ita soluantur enumerare difficilius est; eoque difficilius, quo plura, sunt figurae latera. Soluitur autem hexagonum in triangula 14 modis diuersis, heptagonum 42, ogdogenum 132, enneagonum 429; quos numeros mecum beneuolus communicauit summus *Eulerus*; modo, quo eos reperit, atque progressionis ordine, relatis. Vtrumque perspiciendi cupido, post tentamina quaedam inania, eos numeros eliciendi methodus occurrit adeo simplex, ut in ea acquiescendum mihi putauerim, quam hic proponam.

Triangulum prima ordine est figurarum planarum rectilinearum, quadrilaterum secunda, et ita deinceps,

C c 2

sic

ita porro, donec terminus intermedius nullus sit reli-
quus. Sin autem numerus indicum sit impar, iisdem
factis, quia terminum intermedium vnum superesse ne-
cesse est, qui sit d huius quadratum factis adde, vt
fiat $x = 2aq + 2bp + 2co + \text{etc} + dd$.

Ad indicem o est $a = 1$. Si enim linea recta
concipiatur vt triangulum; figuram istam aliter atque
aliter dissolui non posse manifestum est, quia plures
vnae rectae inter duo puncta non cadunt. Hoc sumpto,
si et numerorum illustis Euleri quinque priores veri
esse ponuntur, sunt autem veri omnes, reperietur nu-
merus modorum, quibus in triangula soluitur figura
ordinis sexti, siue ogdognum, faciendo secundum
schema adiectum

0	1	2	3	4	5	6
1	1	2	5	14	42	84
						+ 28
						+ 20
						132

$x = 2x42 + 2x14 + 2x10$. Sique hinc porro per-
gere velis ad enneagonum, quae figura est ordinis septi-
mi, erit ex schemate producto,

0	1	2	3	4	5	6	7
1	1	2	5	14	42	132	264
							+ 84
							+ 56
							+ 25
							429

$$x = 2x132 + 2x42 + 2x28 + 5x5$$

C c 3

Atque

recurrence

$$C_{n+1} = \sum_{i+j=n} C_i C_j$$

$$C_0 = 1$$

$$\begin{array}{cccccc}
 C_0 & C_1 & C_2 & C_3 & C_4 & C_5 \\
 1, & 1, & 2, & 5, & 14, & 42, \dots
 \end{array}$$

$$\begin{array}{lcl}
 C_6 & = & C_0 C_5 + C_1 C_4 + C_2 C_3 + C_3 C_2 + C_4 C_1 + C_5 C_0 \\
 132 & & 1 \times 42 + 1 \times 14 + 2 \times 5 + 5 \times 2 + 14 \times 1 + 42 \times 1
 \end{array}$$

II	III	III	V	VI	VII	VIII	VIII	X	XI	XII
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	1	2	4	10	28	84	264	858	2860	9724
.	.	.	1	4	10	28	84	264	858	2860
.	.	.	.	.	4	20	56	168	528	1716
.	.	.	.	.	.	.	25	140	420	1320
.	.	.	.	.	.	.	.	.	196	1176

1	1	2	5	14	42	132	429	1430	4862	16796
---	---	---	---	----	----	-----	-----	------	------	-------

XIII	XIII	XV	XVI	XVII
11	12	13	14	15

33592	117572	416024	1503800	5384880
9724	33592	117572	416024	1503800
5720	19448	77184	235144	832048
4290	14300	48620	167960	587860
3696	12012	39040	136136	470288
1764	11088	36036	120120	408408
....		17424	113256	377520
....				184041

58786	208012	751900	2692440	9748845
-------	--------	--------	---------	---------

XVIII	XVIII	XX
16	17	
19497690	69016140	252827580
5384880	19497690	69016140
3007600	10769760	38995380
2080120	7519000	26924400
1646008	5824336	21053200
1410864	4938024	17473008
1283568	4434144	15519504
197340	4171596	14410968
.....	243100	13905320
34508070	126413790	469925500

METHO

VI.

Enumeratio modorum, quibus figurae planae rectilineae per diagonales diuiduntur in triangula.

Auct. I. A. de Segner pag. 203.

Quando in Geometria area figurarum pluribus lateribus inclusarum definiri debet, eae per diagonales in triangula resolui solent, quia tum cuiusque trianguli areae ex cognitis lateribus facile determinantur. Quo pluribus autem lateribus figura est praedita, eo pluribus modis eam hoc modo in triangula resolui posse, vel leuiter attendenti statim est manifestum. Ita cum in quadrilaterum duas diagonales ducere liceat, quadrilaterum duplici modo in bina triangula diuiditur. Pentagonum autem quintuplici modo, diagonalibus ducendis, in triangula resolui posse reperitur, hexagonum vero 14 modis, et heptagonum 42 modis, octogonum 132 modis, enneagonum 429 modis etc. quae omnium modorum possibilium enumeratio, quo magis cum laterum numero eorum multitudo crescit, eo fit difficilior et taediosior. Quare quaestio omnino curiosa, et Geometrarum attentione digna videtur, qua lege illi resolutionum numeri pro laterum multitudine progrediantur, ut inde pro quouis polygono resolutionum numerus rite definiri queat? Hinc Ill. Auctor modo prorsus singulari et ingenioso legem progressionis horum nu-

b 3

mero-

merorum exponit, ac rigoroſe demonſtrat, dum docet, quomodo pro quouis polygono reſolutionum numerus, ex cognita reſolutione polygonorum ſimpliciorum, quae paucioribus conſtant lateribus, colligi debeat. Hac ratione, ſi a ſimpliciſſimis incipiamus, hanc inueſtigati-
nem continuo ad polygona plurium laterum extendere licet; ſicque Ill. Auſtor ſub finem tabellam adiecit, in qua iſtiusmodi reſolutiones ad polygona 20 laterum uſque exhibet. Liceat autem nobis, a ſummo quodam Geome-
tra, qui eandem hanc tabulam calculo ſubiecit, admonitis, obſeruare, hanc tabulam, ob quendam calculi errorem, tantum uſque ad polygona 15 laterum eſſe iuſtam, quip-
pe pro hoc polygono reſolutionum numerus non eſt 751900, ut tabella habet, ſed 742900, ſequentes quoque numeri, dum forte nouus error irrepiſit, pri-
mo ad 17 uſque latera nimis ſunt magni, deinde ve-
ro nimis parui, dum pro 20 lateribus reſolutionum numerus eſt 477638700. Facilius haec apparent, ſi ex lege primum obſeruata, qua quilibet numerus ex omnibus praecedentibus colligitur, alia ad computum facili-
or eliciatur, cuius ope quilibet numerus ex ſolo praecedente definiatur. Ita ſi pro polygono n laterum numerus reſolutionum ſit P , pro polygono ſequenti $n+1$ laterum numerus reſolutionum erit $\frac{n+1}{n} P$.
Quin etiam hinc, ſine conſideratione praecedentium, ſtatim indefinite pro polygono n laterum numerus reſolutionum ita per factores exprimitur, ut ſit:

$$\frac{2}{3} \cdot \frac{6}{4} \cdot \frac{10}{5} \cdot \frac{14}{6} \cdot \frac{18}{7} \cdot \frac{22}{8} \cdot \dots \cdot \frac{n+1}{n}$$

ubi numeratores quaternario, denominatores uero uni-
tate creſcunt. Hinc ſequentem nouam tabulam, bene-
vole

vole nobiſcum communicatam, adiungere e re viſum eſt, quod Ill. Auſtori huius ſchediaſmatis non diſpli-
citurum eſſe ſperamus.

Num. laterum	numerus reſolutionum.	num. laterum	numerus reſolutionum.
III	1	XV	742900
IV	2	XVI	2674410
V	5	XVII	9694845
VI	14	XVIII	35357670
VII	42	XIX	129644790
VIII	132	XX	477638700
IX	429	XXI	1767263190
X	1430	XXII	6564120420
XI	4862	XXIII	24466267020
XII	16796	XXIV	91482563640
XIII	58786	XXV	343059613650
XIV	208012		

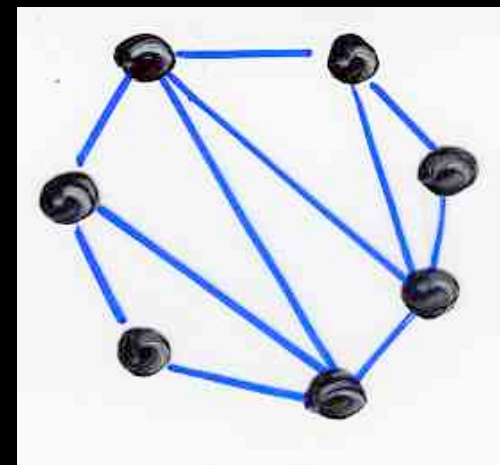
VII.

Methodus ſimplex et vniuerſalis omnes
omnium aequationum radices dete-
rmini

$$2(2n+1)C_n = (n+2)C_{n+1}$$

Complures iam a Geometris excogitatae ſunt me-
thodi aequationum algebraicarum radices, vel ac-
curate, vel proxime ſaltem, determinandi: omnes au-
tem ſere poſtulant, ut valores radicum, quae quae-
runtur,

$$\frac{1}{n+1} \binom{2n}{n}$$



S.K. Kotel'nikov

$$2(2n+1)C_n = (n+2)C_{n+1}$$

$$\frac{1}{n+1} \binom{2n}{n}$$

6. In dno solido hinc planis incluso appropinquat
et numerus angulorum solidorum binario superat numerum facierum
Sic est $FC + S = A + 2$ seu $FC + S = \frac{1}{2}A + 2 = \frac{1}{2}P + 2$

7. Impossibile est ut

8. Impossibile est ut

9. Nullum formari pos
latum, nec corpus om
sint constati

$$S - A + F = 2$$

plurimum
quod plani

10. Summa omnium angulorum planorum, qui in ambitu solidi cernuntur
aequantur, tot angulis rectis quot sunt lateres in $A - A - A - A$
11. Summa omnium angulorum planorum aequatur quater tot angulis
rectis quot sunt anguli solidi danti octo. Sic est $A S - 8$ rectis

Exemplum 1. prisma triangulare ubi est

1. numerus laterum

$$S = 6$$

2. numerus ang. sol.

$$A = 9$$

3. numerus facierum (ab, ac, bc, ad, bd, cd, ef, de, df, af) $P = 10$

4. numerus laterum et angulorum planorum $L = P = 10$. Inscribitur enim corpus
duobus triangulis et tribus quadrilateris, unde $L = P = 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 = 18$

Hinc est in Theor. 6: $FC + S (11) = A + 2 (11)$

Summa omnium angulorum planorum (aut in fig. d. = 2 rectis, aut in
fig. $\square = 12$ rectis) aut $= 16$ rectis $= 4(A - H) = 4S - 8$ rectis.



DOCTRINAE SOLIDORVM M. 119

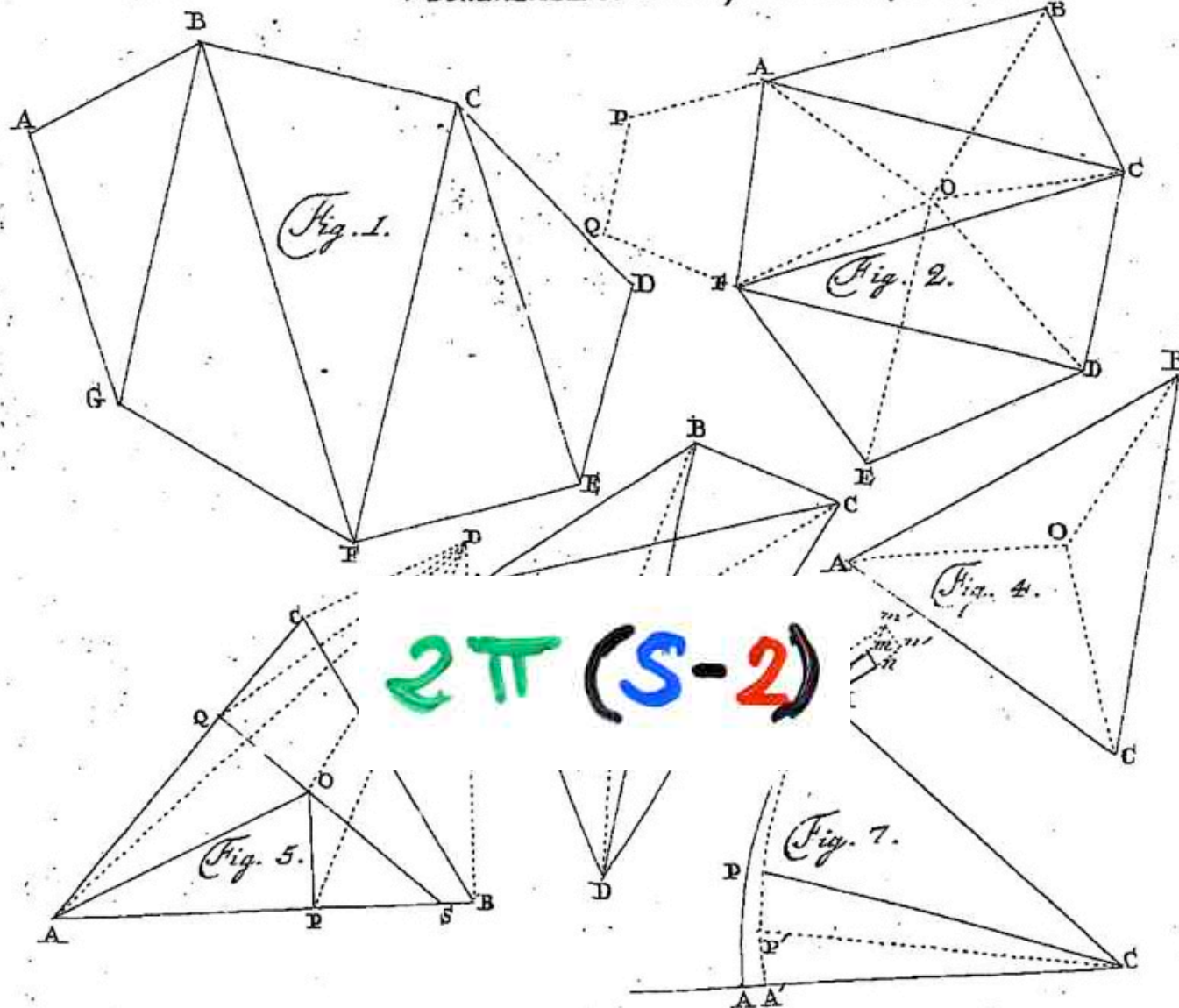
hedrarum ponatur $= H$, neque hic numerus H neque numerus S maior esse potest quam $\frac{2}{3} A$.

PROPOSITIO IV.

§. 33. *In omni solido hedris planis incluso aggregatum ex numero angulorum solidorum et ex numero hedrarum binario excedit numerum acierum.*

DEMONSTRATIO.

Scilicet si ponatur ut hactenus:
 numerus angulorum solidorum $= S$
 numerus acierum - - - - $= A$
 numerus hedrarum - - - $= H$
 demonstrandum est, esse $S + H = A + 2$.



Les nombres de Catalan
au 19ème siècle

“Lisez Euler, lisez Euler,
il est le Maître de nous tous”



Pierre-Simon Laplace
1749 - 1827

“Lisez Euler,
dans ses écrits tout est clair, bien calculé,
ils regorgent de beaux exemples et parce
que l’on doit toujours étudier les sources”



Joseph-Louis Lagrange
1736 - 1813

Extrait d'une lettre de M. LAMÉ à M. LIOUVILLE sur cette question : *Un polygone convexe étant donné, de combien de manières peut-on le partager en triangles au moyen de diagonales ?* (*)

« La formule que vous m'avez communiquée hier, se déduit facilement de la comparaison de deux méthodes qui conduisent au même but.

» En effet, on peut, à l'aide de deux méthodes différentes, évaluer le nombre des décompositions en triangles d'un polygone : par la considération des côtés, ou par celle des sommets.

I.

» Soit ABCDEF... un polygone convexe de $n + 1$ côtés, et soit désigné par le symbole P_n le nombre total des décompositions en triangles d'un polygone de k côtés. Un côté quelconque AB de BCDEF... servira de base à un triangle, dans chacune des P_{n+1} décompositions de ce polygone, et ce triangle aura son sommet en C, en D, ou E, ou F... ; au triangle CBA correspondront P_n décom-

(*) Voyez un Mémoire de Segner (*Novi Commentarii Acad. Petrop.*, t. VII, 203). L'auteur a trouvé l'équation (1) de M. Lamé ; mais la formule (3) offre une solution bien plus simple que la sienne. Cette formule (3) est due sans doute à Euler. Elle est indiquée sans démonstration à la page 14 du volume cité plus haut. L'identité des équations (1) et (3) n'est pas facile à établir. M. Terquem y étant parvenu à l'aide de quelques propriétés des factorielles, m'a proposé ce problème. Je l'ai communiqué ensuite à divers géomètres : aucun d'eux ne l'a résolu ; M. Lamé a été plus heureux : j'ignore si d'autres avaient obtenu avant lui une solution aussi élégante.

J. LIOUVILLE.



Réflexions sur le Problème de déterminer le nombre de manières dont une figure rectiligne peut être partagée en triangles au moyen de ses diagonales ;

PAR M. J. BINET,

Professeur au Collège de France, ancien Professeur à l'École Polytechnique, etc.



...a été résolue par Euler, mais il n'a pas donné la
sa formule. On la trouve citée dans l'analyse som-
moire de Segner, sur le même sujet, imprimé dans la
int-Petersbourg, 1758 — 1759 : nous apprenons de
lui avait indiqué ce problème et qu'il lui avait en-
communiqué les nombres de décompositions triangu-
laires de 4, 5, 6, 7, 8, 9 côtés : ces nombres sont
132, 429. Segner trouva une méthode pour passer
des polygones de moins de n côtés au polygone
par une espèce d'échelle de dérivation que nous
redessous. Il en déduisit une table étendue jus-
qu'à 20 côtés : En comparant cette table à la
connue qu'à partir du polygone de 15 côtés, elle était
est alors qu'il donna sa formule, et la table qu'il en
portée jusqu'aux polygones de 25 côtés. La formule
à différences finies du premier ordre, beaucoup
de l'échelle de dérivation de Segner. Ainsi la solu-
tion du problème a conduit à deux formules analytiques
quelle voie algébrique peut-on passer de l'une à l'autre ?
Mais de M. Terquem, dont le talent et l'érudition sont
connus des géomètres, que ce problème d'analyse a vainement exercé
des hommes habiles. Dans ces derniers temps, M. Lamé a démontré la

*Sur le nombre de manières de décomposer un polygone
en triangles au moyen de diagonales ;*

PAR M. OLINDE RODRIGUES.

En désignant ce nombre par P_n pour un polygone de n côtés, on a

$$P_{n+1} = \frac{4n-6}{n} P_n,$$

formule que M. Lamé a démontrée dans le dernier cahier de ce Journal, et qui peut être établie plus directement comme il suit.

Les triangles qui entrent dans chaque figure de décomposition d'un polygone de n côtés, est $n-2$.

Les droites, diagonales ou côtés, qui joignent deux à deux les sommets de chacune de ces figures de décomposition est $2n-3$.

Le total de ces droites pour les P_n figures sera donc $(2n-3)P_n$;

car, si l'on suppose que chacune de ces droites joint deux sommets, on comprend que $\frac{4n-6}{n} P_n$ représente le nombre total des droites

des P_n figures, vues ensemble, aboutissant à un sommet du polygone donné.

Il est plus évident que chacune de ces droites, dont le nombre est $\frac{4n-6}{n} P_n$, se trouve répétée autant de fois dans les

figures ensemble qu'il y a de décompositions possibles du polygone donné, rapportées à cette droite, côté ou diagonale.

On peut dire encore que $\frac{4n-6}{n} P_n$ exprime le nombre des décompositions possibles d'un polygone de n côtés,

suivies par rapport à l'une et à l'autre des $n-1$ droites qui, partant d'un sommet désigné, vont joindre les autres sommets.

En effet, si une décomposition s'opère par rapport à un côté donné, lorsque ce côté ou cette diagonale fait



Solution nouvelle de cette question : *Un polygone étant donné, de combien de manières peut-on le partager en triangles au moyen de diagonales ?*

PAR E. CATALAN. (*)

Soit $ABCD \dots XYZA$, un polygone convexe de $n + 1$ côtés, et soit désigné par P_{n+1} le nombre total des décompositions de ce polygone.

ions, il y en a qui renferment le triangle ABC :

ment le triangle BCD : elles sont toutes disjointes et leur nombre est pareillement P_n .

nous devons ajouter :

ns du polygone de n côtés $CEF \dots ZABC$, pas le triangle ABC ; je désigne leur nombre

as de $DFG \dots ABCD$, dans lesquelles n'entrent consécutifs ABC , BCD ; je désigne leur nom-

is de $EGH \dots BCDE$, dans lesquelles n'entrent consécutifs ABC , BCD , CDE ; leur nombre

de décompositions du polygone de n côtés lesquelles n'entrent pas les $n - 2$ triangles $\dots XYZ$: leur nombre est P_{n-1} .
compositions, nous obtiendrons toutes celles

écrite depuis le mois de novembre dernier. Comme on ne m'en avait pas décidé à la publier, si, par une coïncidence, M. BINET n'était arrivé, de son côté, à l'équation (A).



Note sur une Équation aux différences finies ;

PAR E. CATALAN.

M. Lamé a démontré que l'équation

$$P_{n+1} = P_n + P_{n-1}P_3 + P_{n-2}P_4 + \dots + P_4P_{n-3} + P_3P_{n-1} + P_n, \quad (1)$$

se ramène à l'équation linéaire très simple,

$$P_{n+1} = \frac{4n-6}{n} P_n \quad (2)$$

Admettant donc la concordance de ces deux formules, je vais chercher à en déduire quelques conséquences.

I.

L'intégrale de l'équation (2) est

$$P_{n+1} = \frac{6}{3} \cdot \frac{10}{4} \cdot \frac{14}{5} \dots \frac{4n-6}{n} P_3;$$

et comme, dans la question de géométrie qui conduit à ces deux équations, on a $P_3 = 1$, nous prendrons simplement

$$P_{n+1} = \frac{2 \cdot 6 \cdot 10 \cdot 14 \dots (4n-6)}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \dots n}. \quad (3)$$

Le numérateur

$$\begin{aligned} 2 \cdot 6 \cdot 10 \cdot 14 \dots (4n-6) &= 2^{n-1} \cdot 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \dots (2n-3) \\ &= \frac{2^{n-1} \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \dots (2n-2)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8 \dots (2n-2)} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \dots (2n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (n-1)}. \end{aligned}$$

Donc

$$P_{n+1} = \frac{n(n+1)(n+2) \dots (2n-2)}{2 \cdot 3 \cdot 4 \dots n}. \quad (4)$$

Addition à la note sur une équation aux différences finies, insérée dans le volume précédent, page 508.

PAR E. CATALAN (*).

VIII.

Si l'on désigne par $C_{2n,n}$ le nombre des combinaisons de $2n$ lettres, prises n à n , on aura

$$C_{2n,n} + C_{2n-2,n-1} \times C_{2,1} + C_{2n-4,n-2} \times C_{4,2} + \dots + C_{2n,n} = 2^{2n}. \quad (30)$$

Pour démontrer ce théorème, je considère l'équation

$$P_n + P_{n-1}P_1 + P_{n-2}P_2 + \dots + P_1P_{n-1} + P_n = a^n; \quad (31)$$

dans laquelle a est une constante donnée, et P_n une fonction inconnue du nombre entier n , assujettie seulement à cette condition, que $P_0 = 1$.

Conformément à la méthode très élégante employée par M. Binet dans un cas semblable (voyez page 82), je prends la fonction génératrice de P_n , savoir

$$Z = 1 + P_1z + P_2z^2 + \dots + P_nz^n + \dots, \quad (32)$$

z étant une indéterminée.

En élevant au carré, il vient en vertu de l'équation (31),

$$Z^2 = 1 + az + a^2z^2 + a^3z^3 + \dots + a^n z^n + \dots \quad (33)$$

Or, quel que soit a , on peut toujours supposer z assez petite, pour

(*) On continuera dans cette *Addition* l'ordre des n^{es} de la note citée.

CCLXI. — Sur les Nombres de Segner (*).

(Août 1886.)

XVIII. Relation entre les Nombres de Segner et les Nombres de Catalan (**).

Le petit Mémoire intitulé: *Sur un développement de l'intégrale elliptique, de première espèce* (***), contient les égalités suivantes :

$$\frac{P_n}{2^{n+2}} = (2n-1)^2 T_{n+1}^2 - 4 \frac{n-1}{1} (2n-5)^2 T_n^2 + 4^2 \frac{(n-2)(n-5)}{1 \cdot 2} (2n-5)^2 T_{n-1}^2 - \dots,$$

$$n^2 P_n - 8(3n^2 - 5n + 1) P_{n-1} + 128(n-1)^2 P_{n-2} = 0 \text{ (iv)}.$$

On en conclut, évidemment, une équation du premier degré, entre les carrés des Nombres de Segner. Elle paraît devoir être fort compliquée.

XIX. Propriétés nouvelles (*). — 1° Soit i le nombre des termes impairs compris dans la suite :

$$\left(\frac{n-2}{1}\right), \left(\frac{n-2}{2}\right), \left(\frac{n-2}{4}\right), \left(\frac{n-2}{8}\right), \dots;$$

selon que n est pair ou impair, T_n est ou n'est pas divisible par 2^i (v).

(*) Complément à la Note CVII. (Congrès de Nancy.)

(**) M. l'Amiral de Jonquières m'a fait l'honneur de proposer cette dénomination, qui n'a point prévalu. Je l'emploie pour abrégier.

(***) Académie de Belgique, 10 octobre 1885.

(iv) Les nombres entiers $P_1, P_2, P_3, \dots$, que M. de Jonquières a bien voulu calculer, ont les valeurs suivantes :

$$P_1 = 8, \quad P_2 = 80, \quad P_3 = 896, \quad P_4 = 10\,816, \dots$$

(v) Addition au paragraphe XVII.

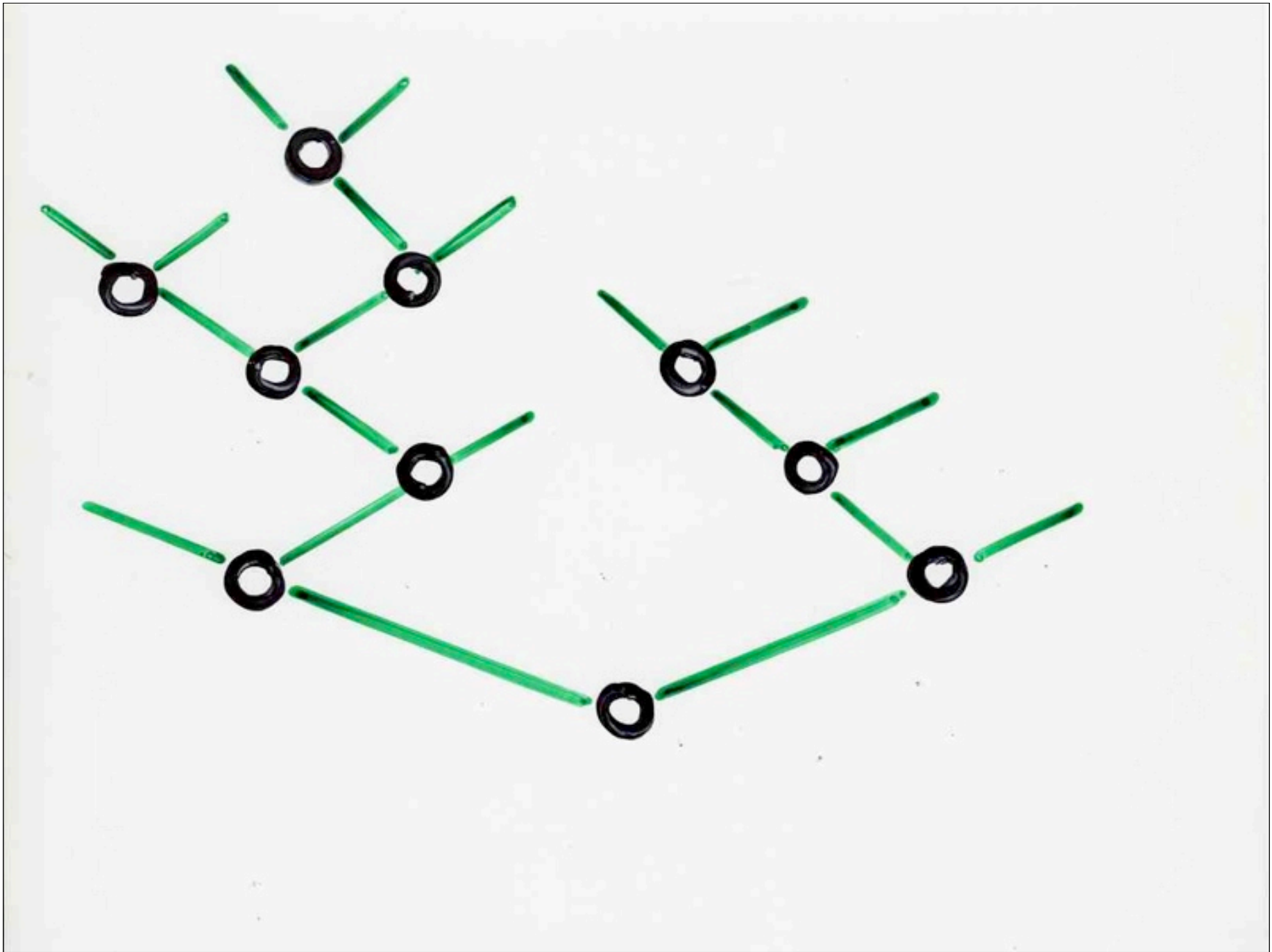
(vi) Cette proposition résulte de l'égalité

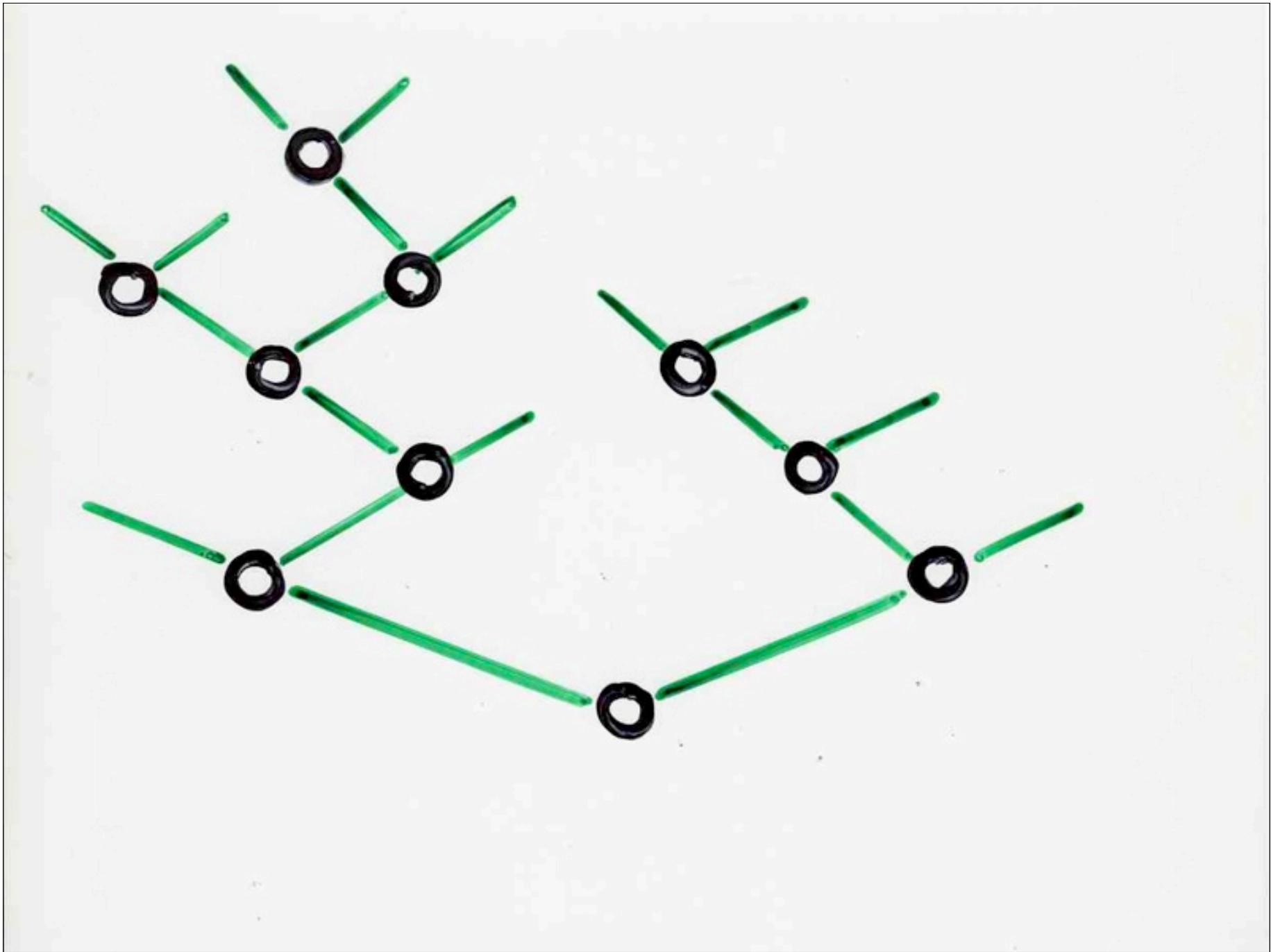
$$nT_{n+1} = C_{2n-2, n-1},$$

(7)

au 20^{ème} siècle ...

les arbres binaires





$C_n =$ nombre
d'arbres binaires
ayant n
sommets internes

(et donc $n+1$ feuilles)

nombre de Catalan

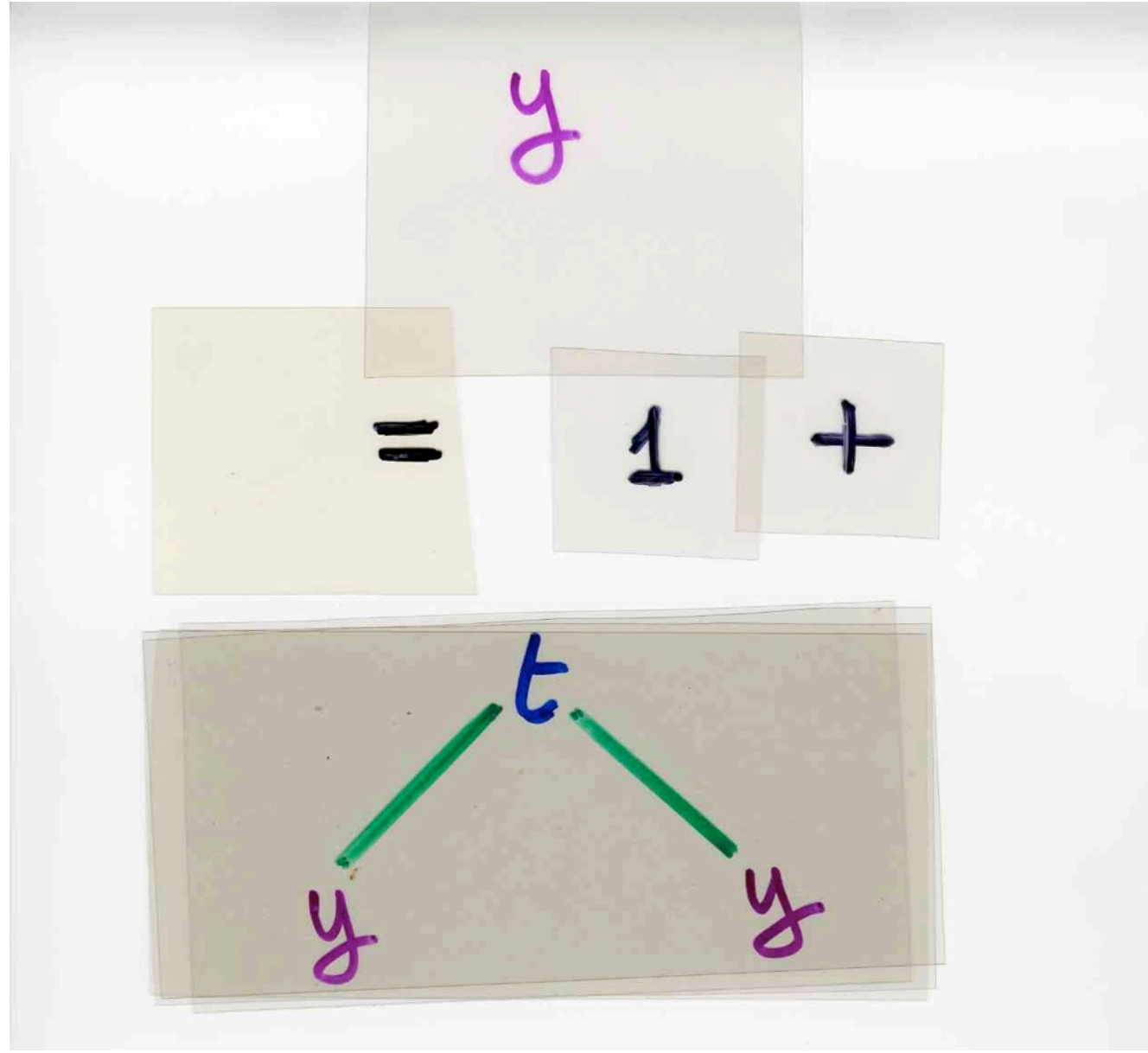
Arbre

=



Arbre

Arbre



y

=

1

+

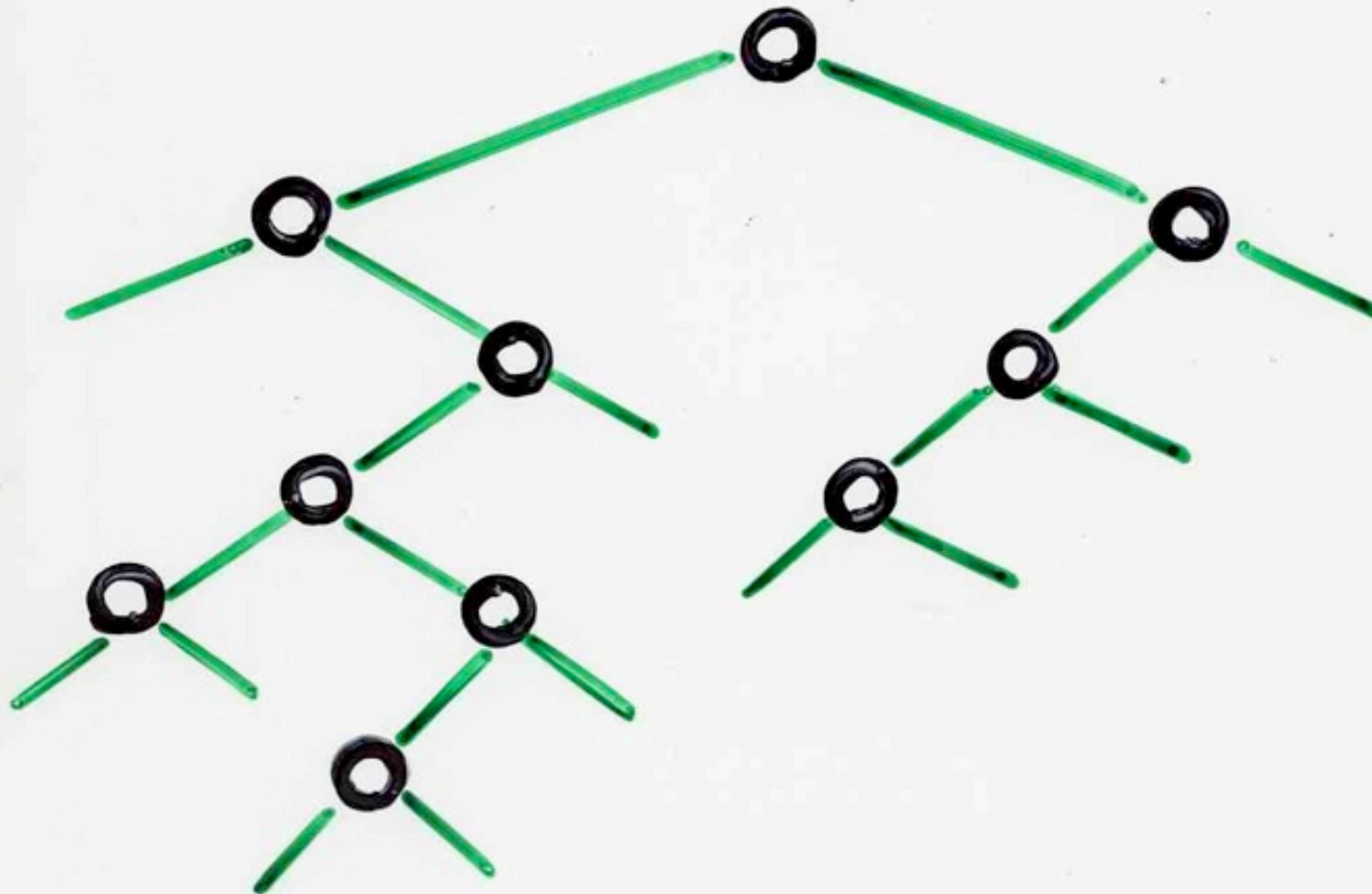
t

(

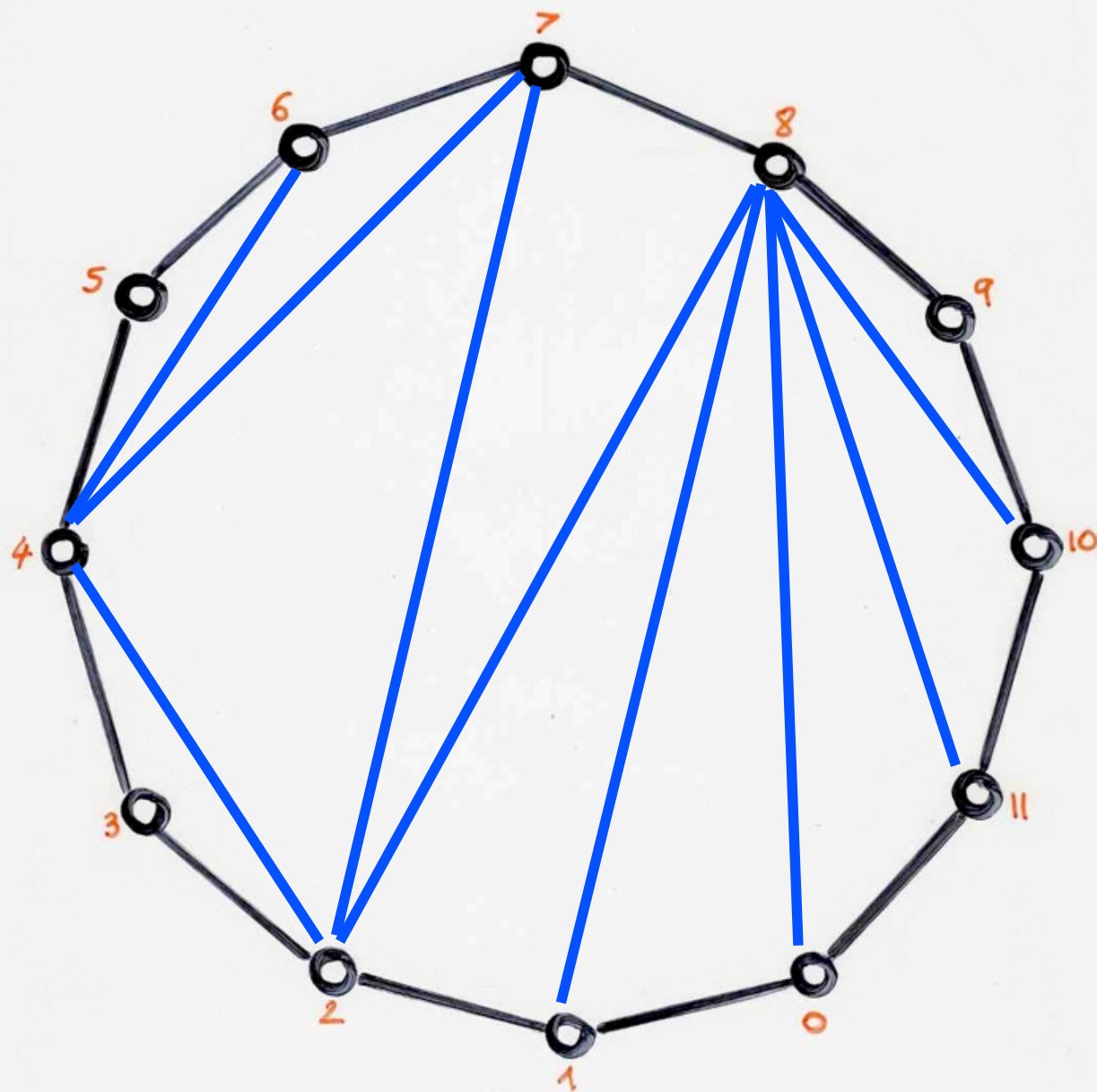
y

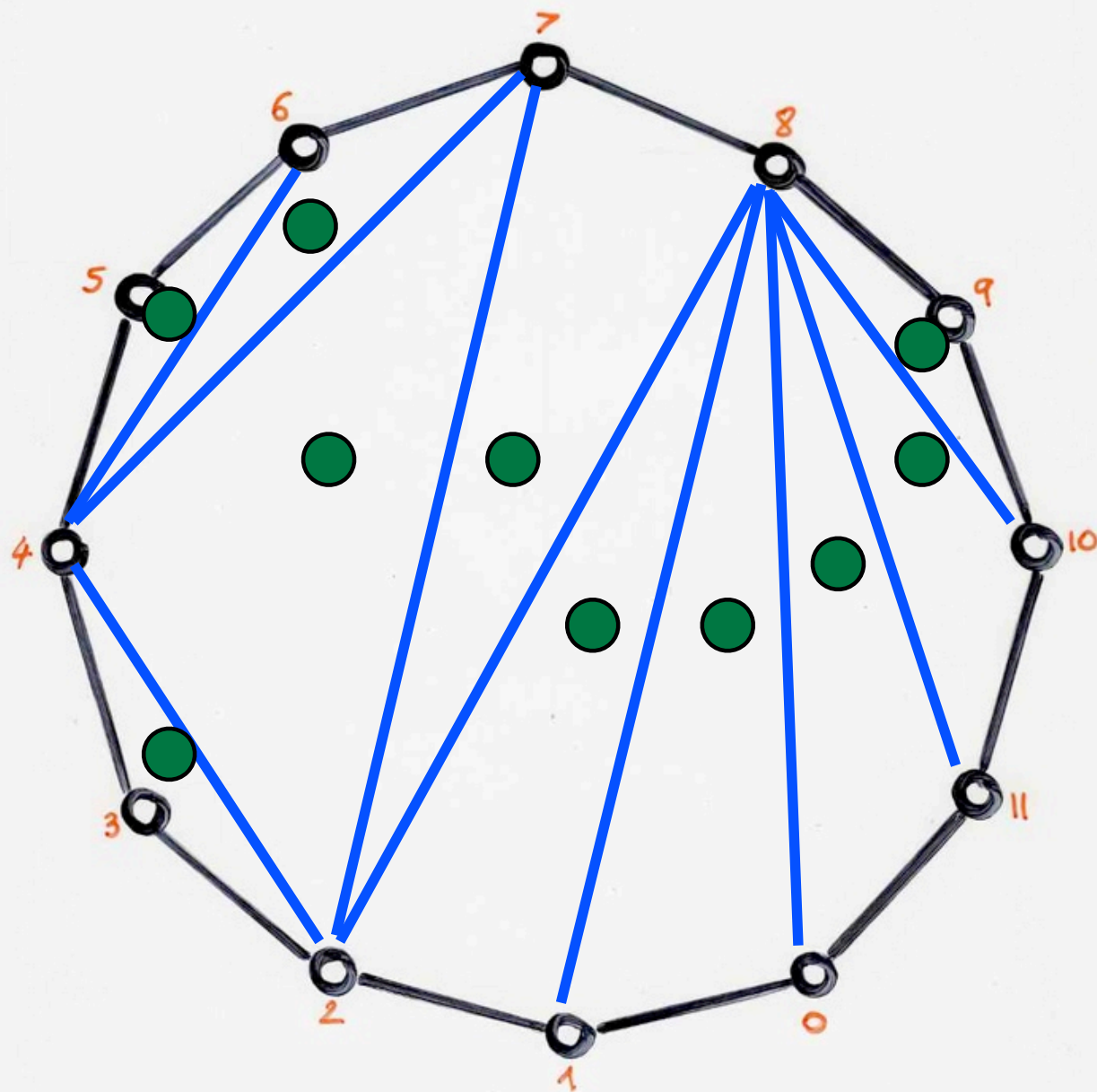
)²

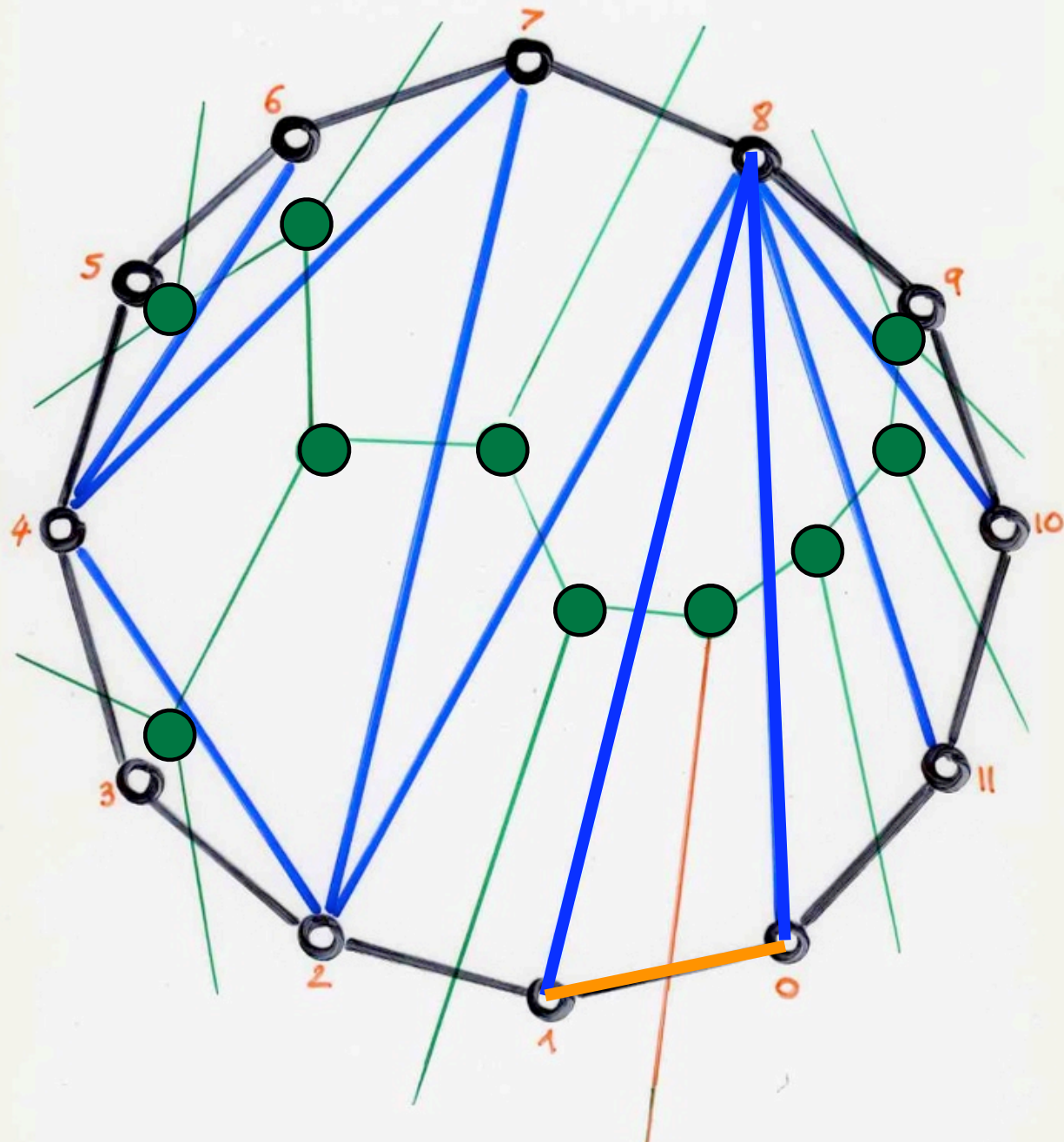
$$2(2n+1)C_n = (n+2)C_{n+1}$$

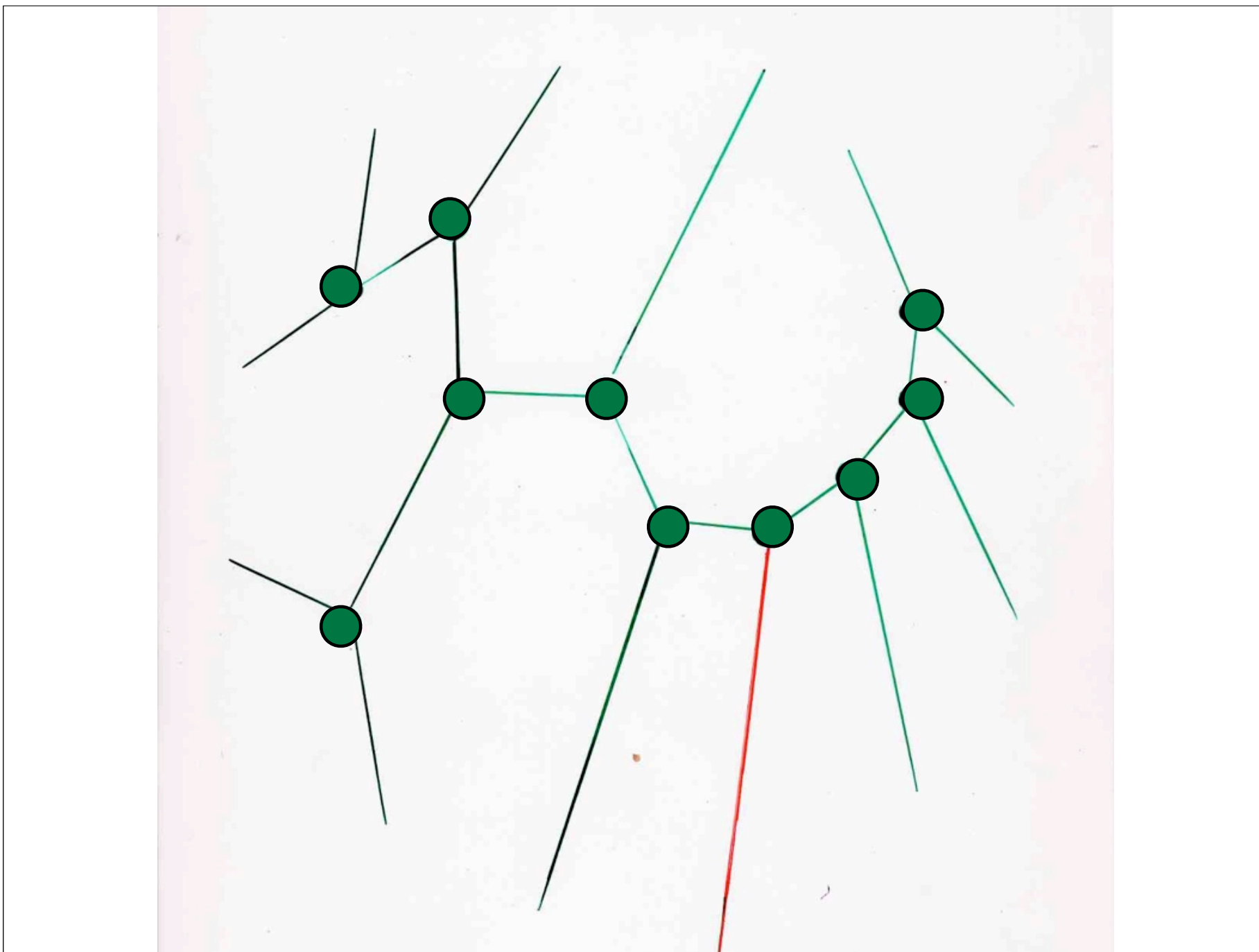


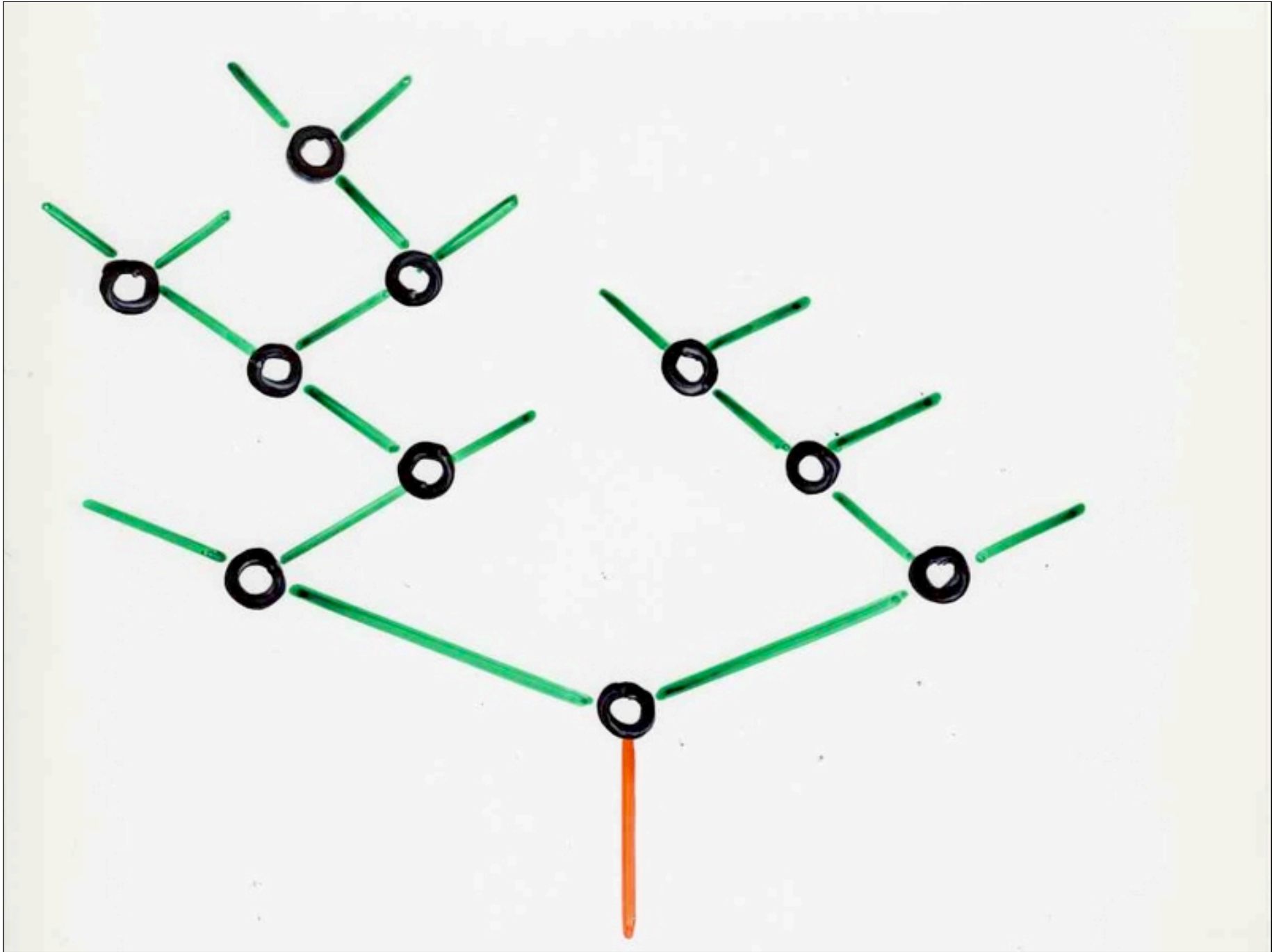
des triangulations
aux arbres binaires

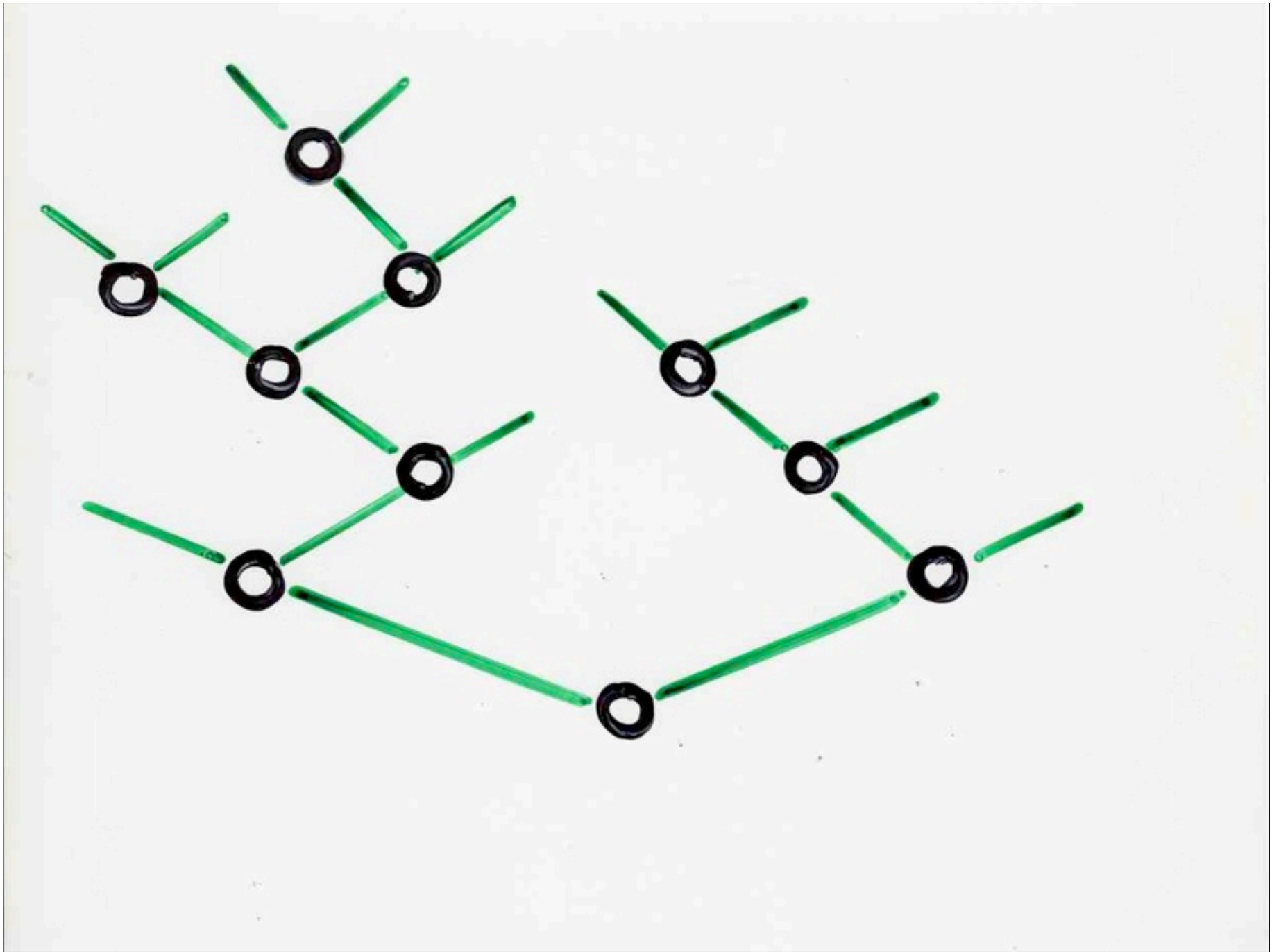




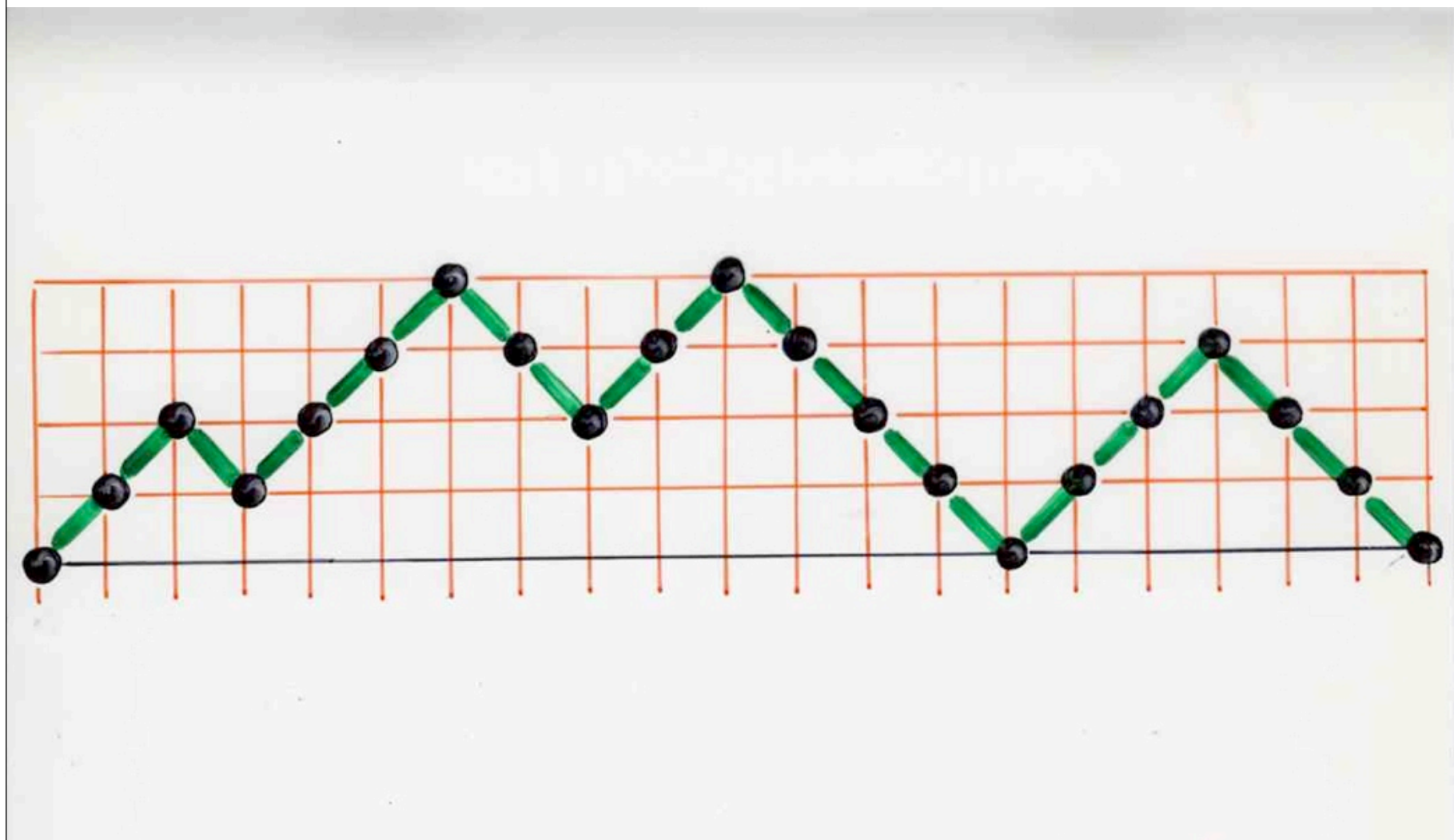


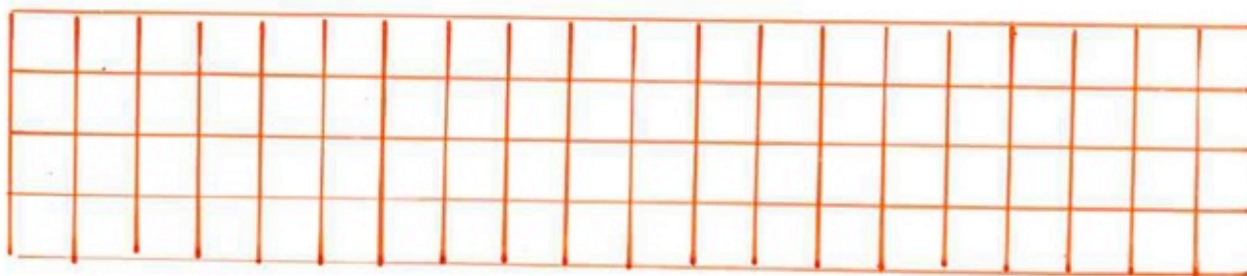
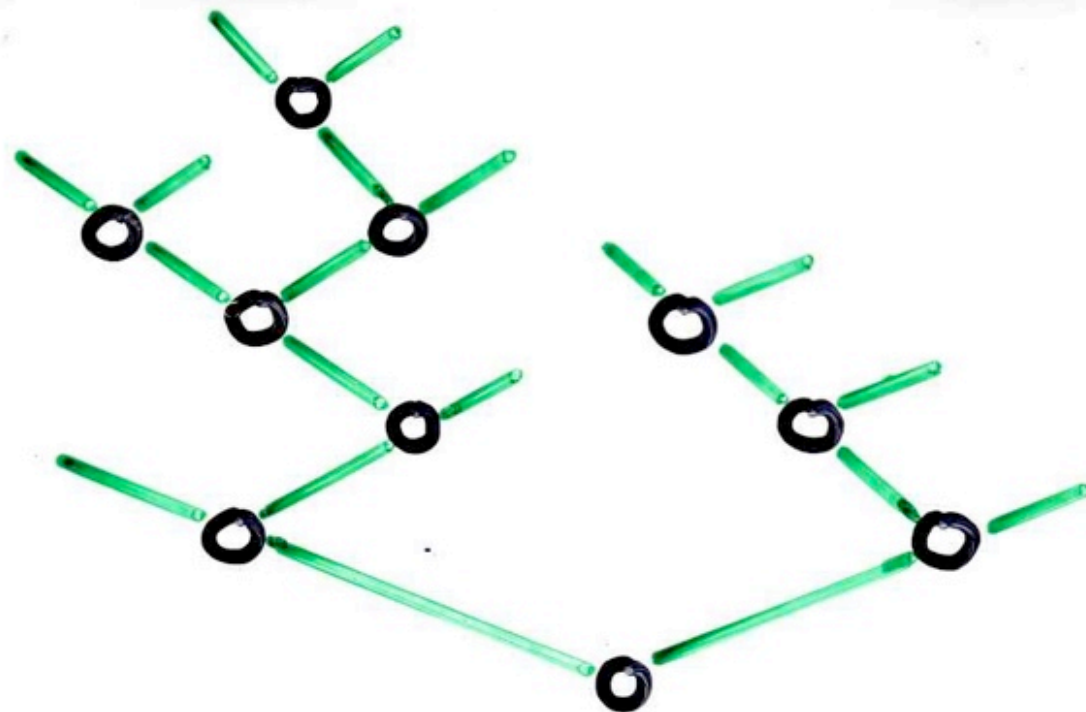


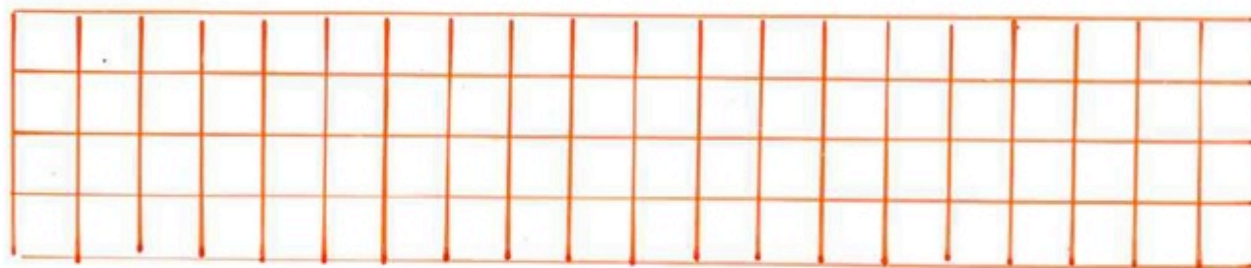


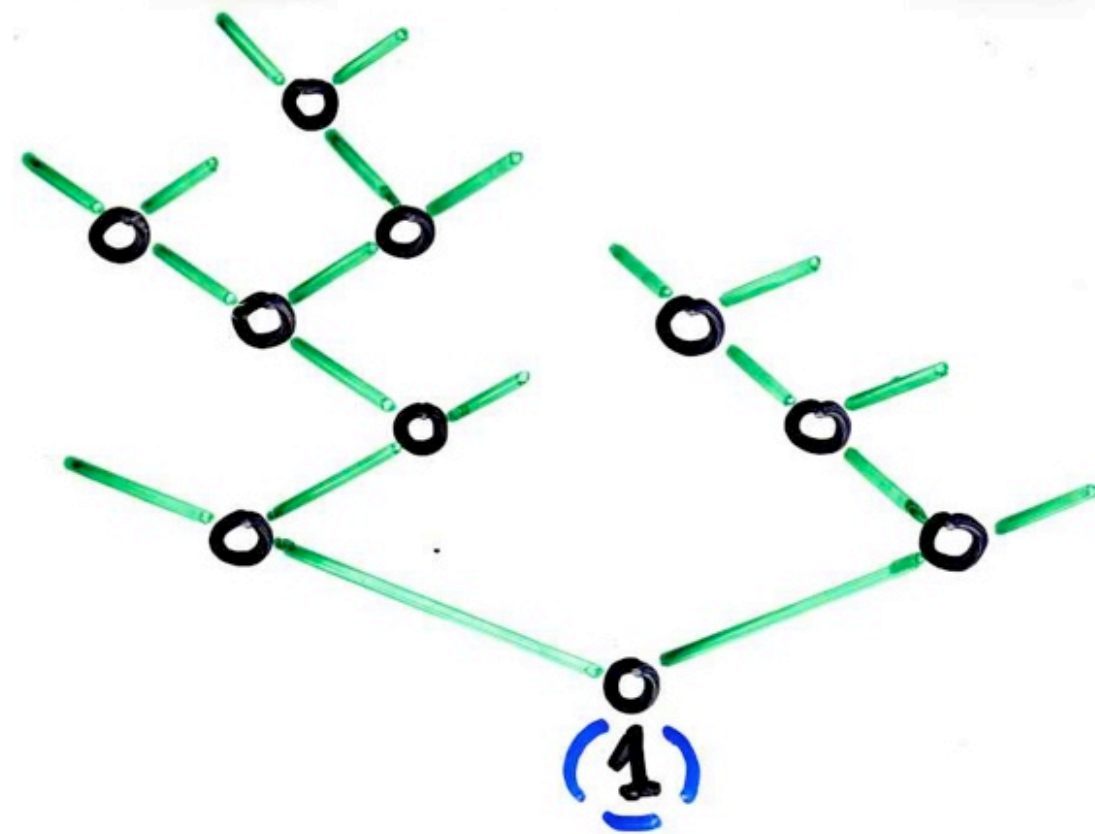


des arbres binaires ...
aux chemins de Dyck

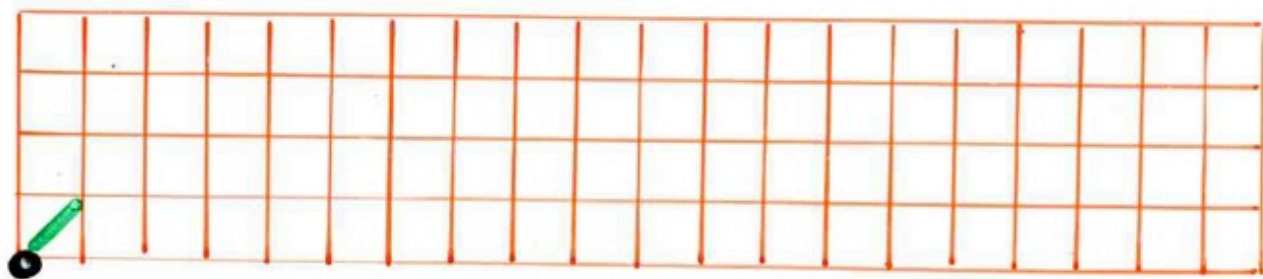
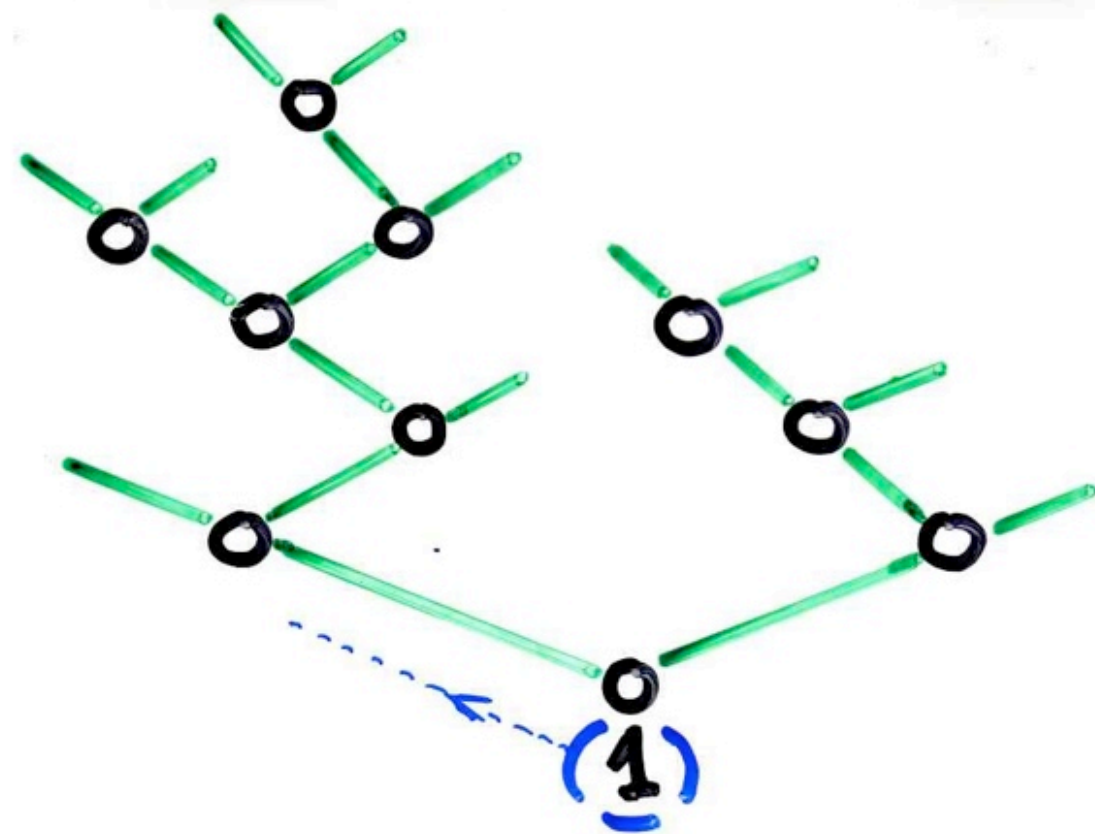


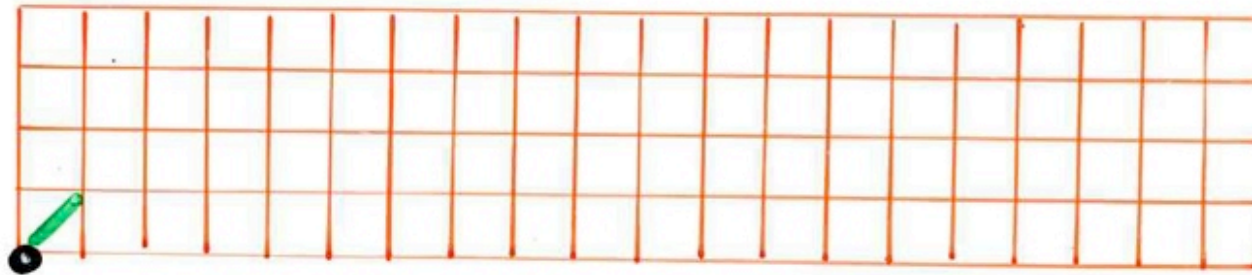
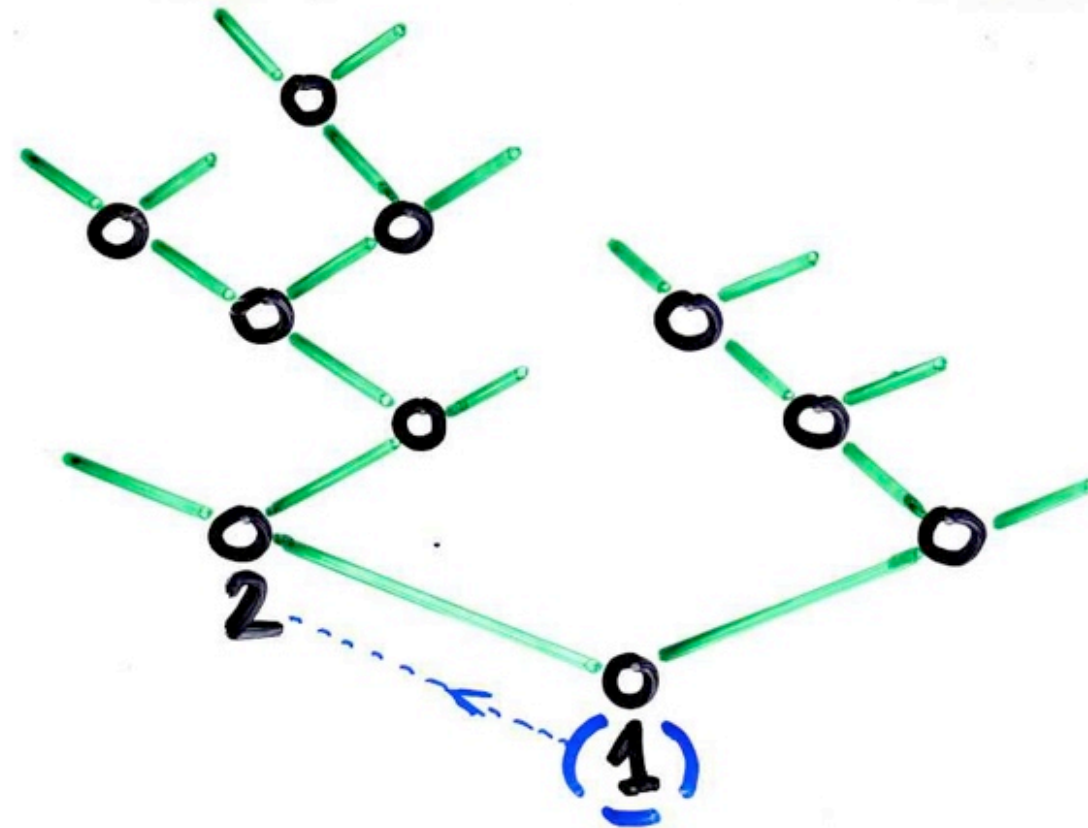


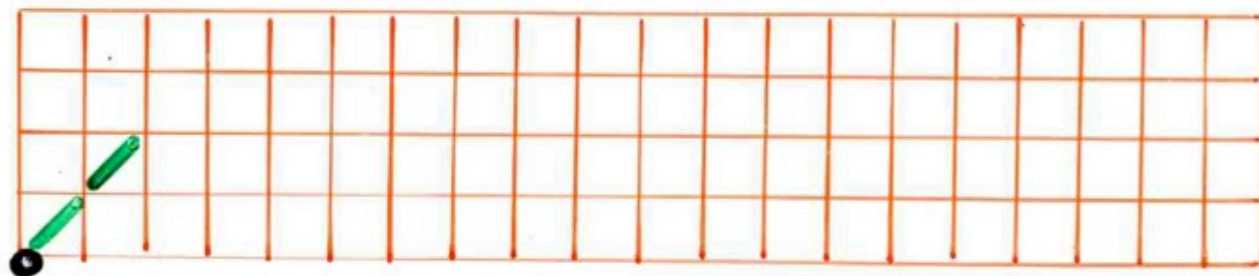
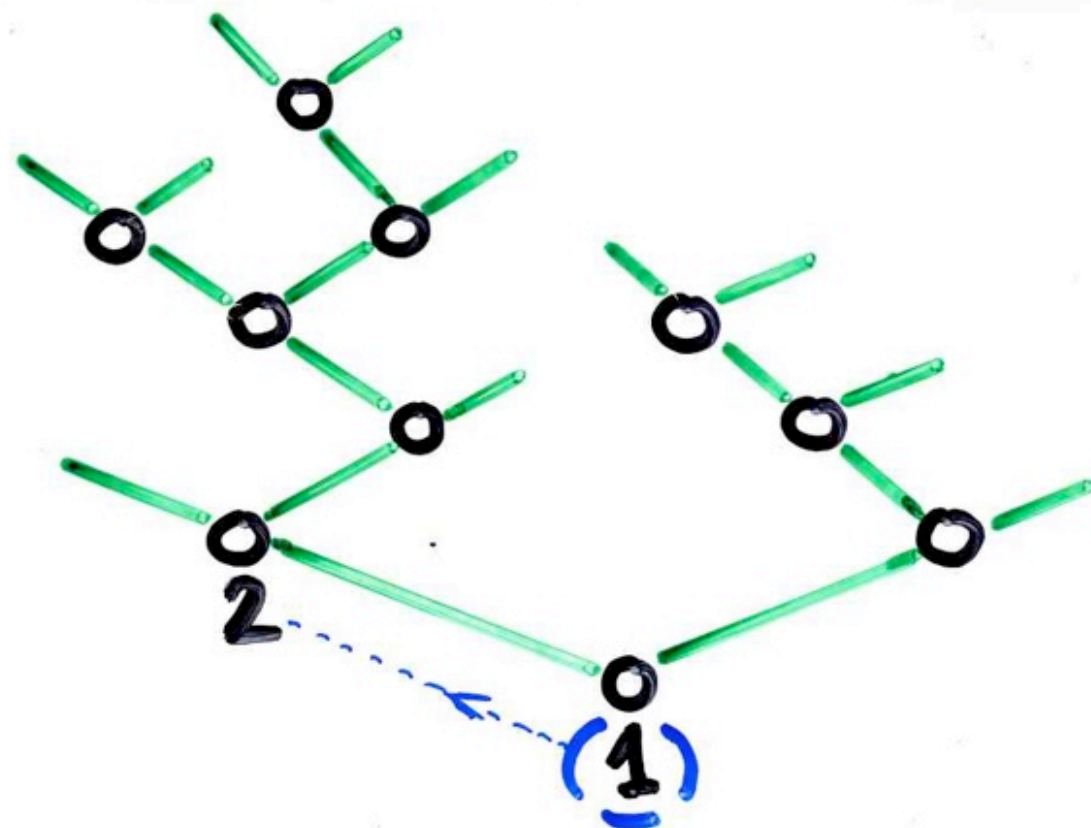


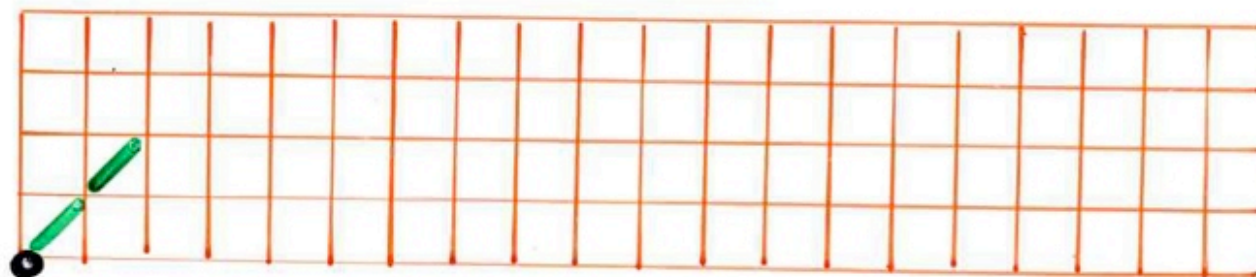
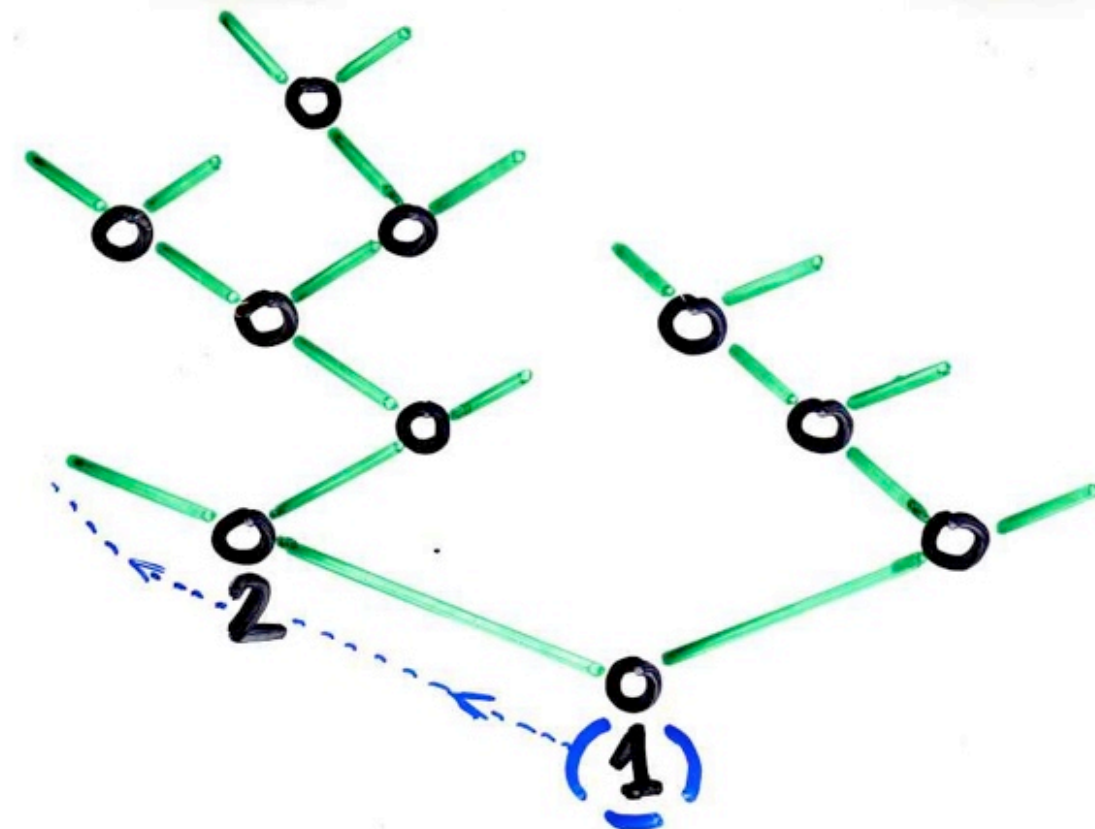


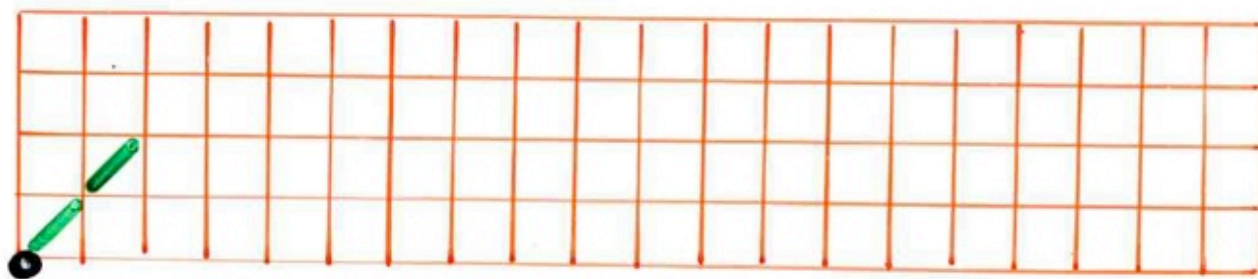
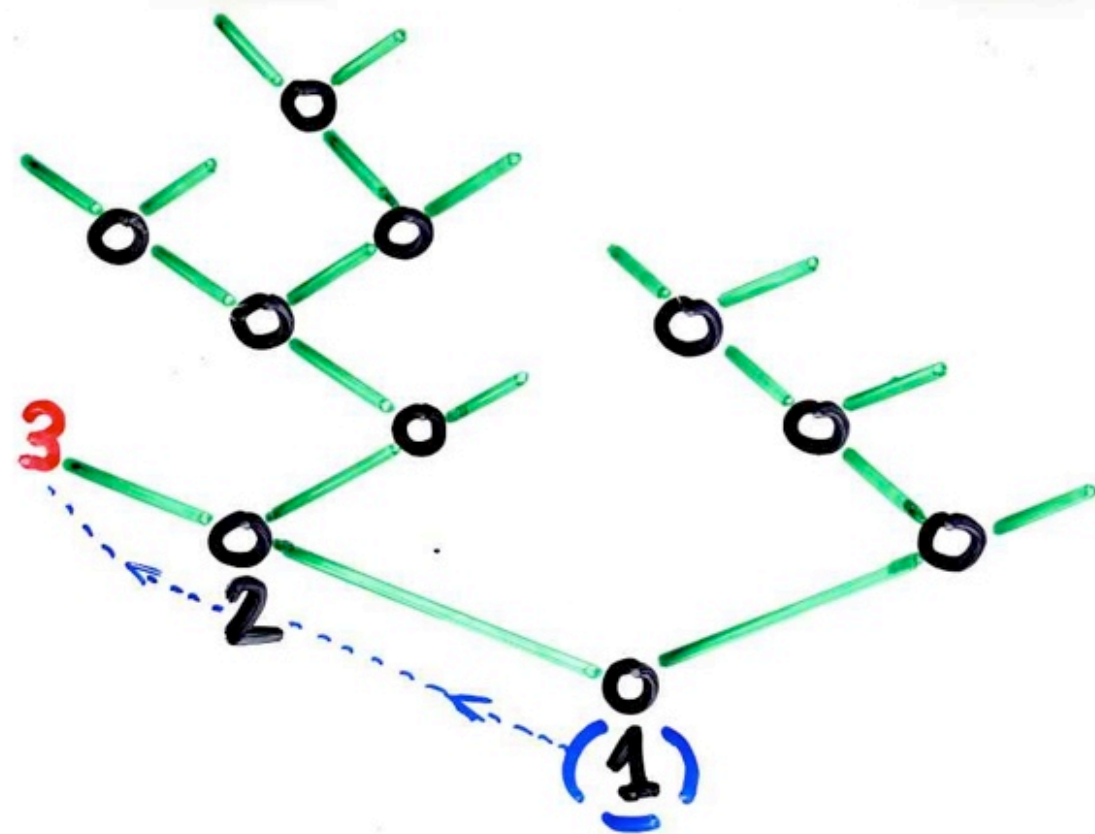
A grid with 20 columns and 4 rows. The grid is composed of orange lines. In the bottom-left cell (row 4, column 1), there is a small green line segment extending upwards and to the right, ending in a black dot.

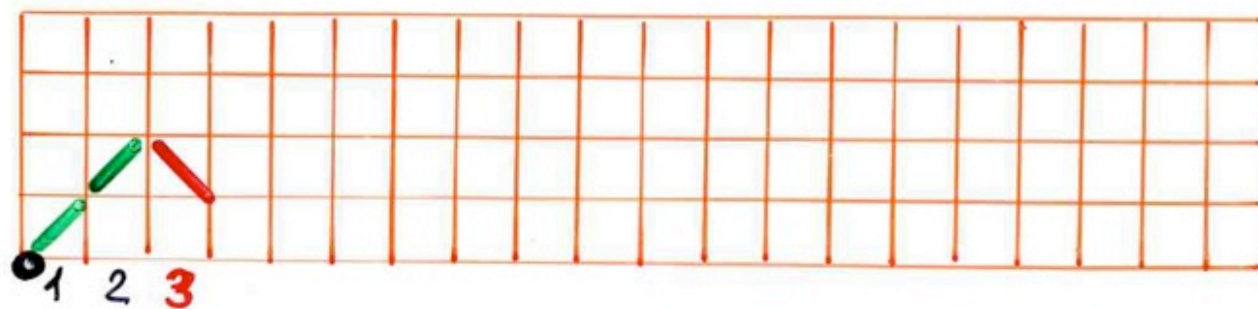
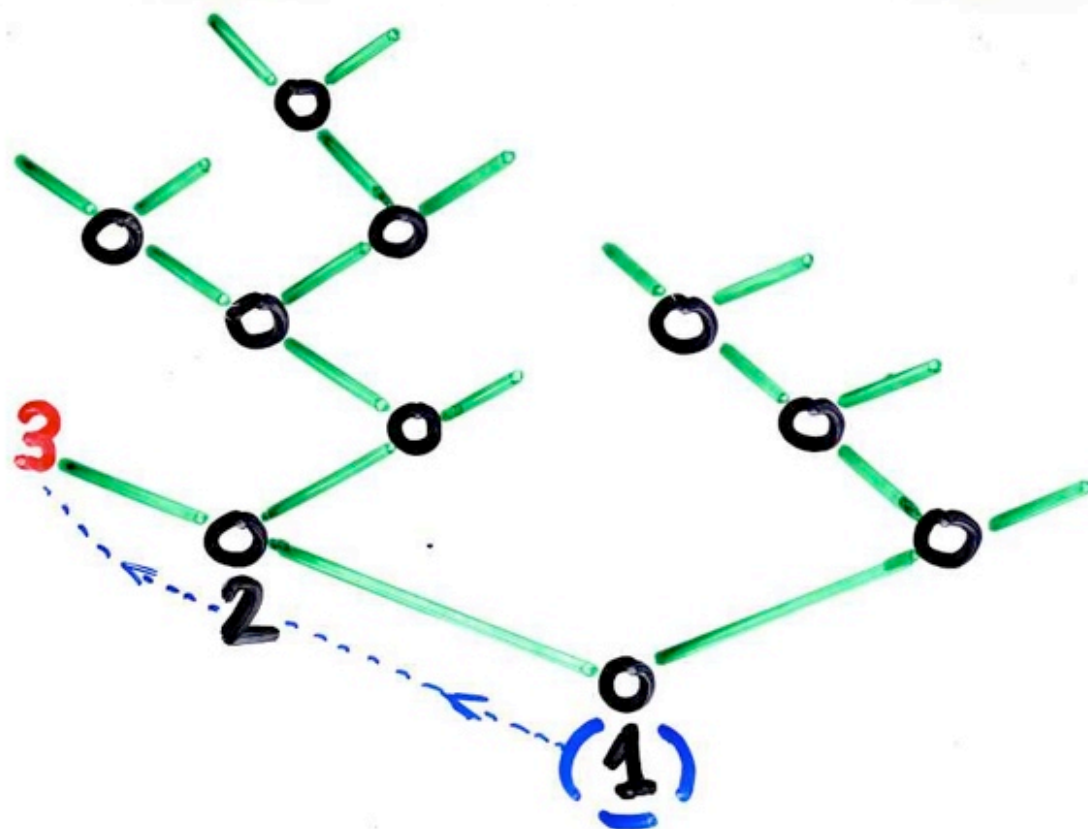


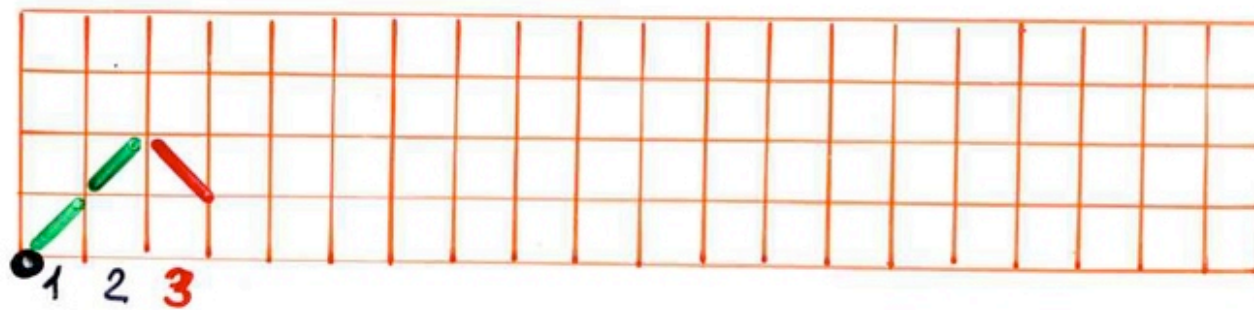
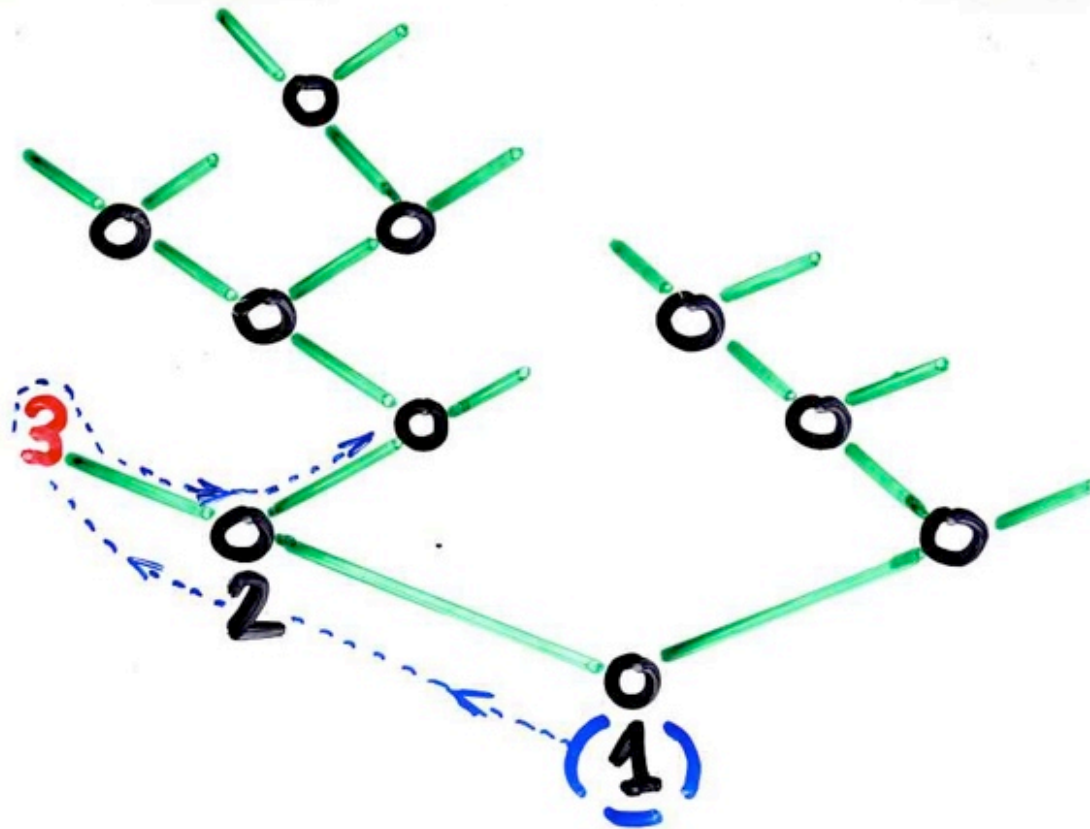


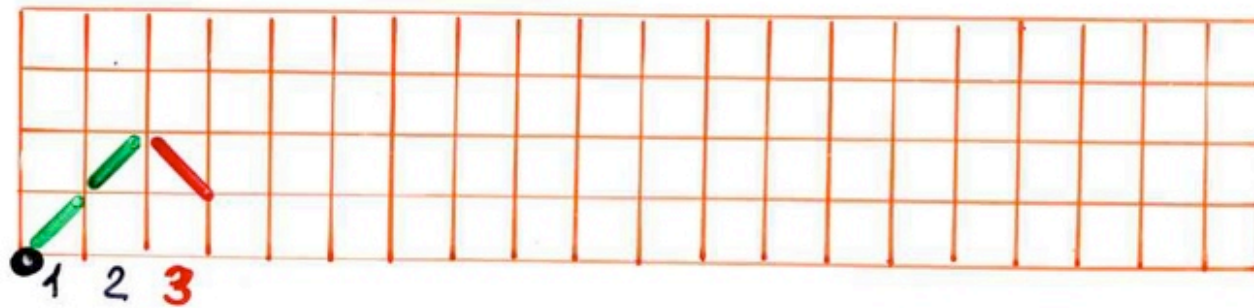
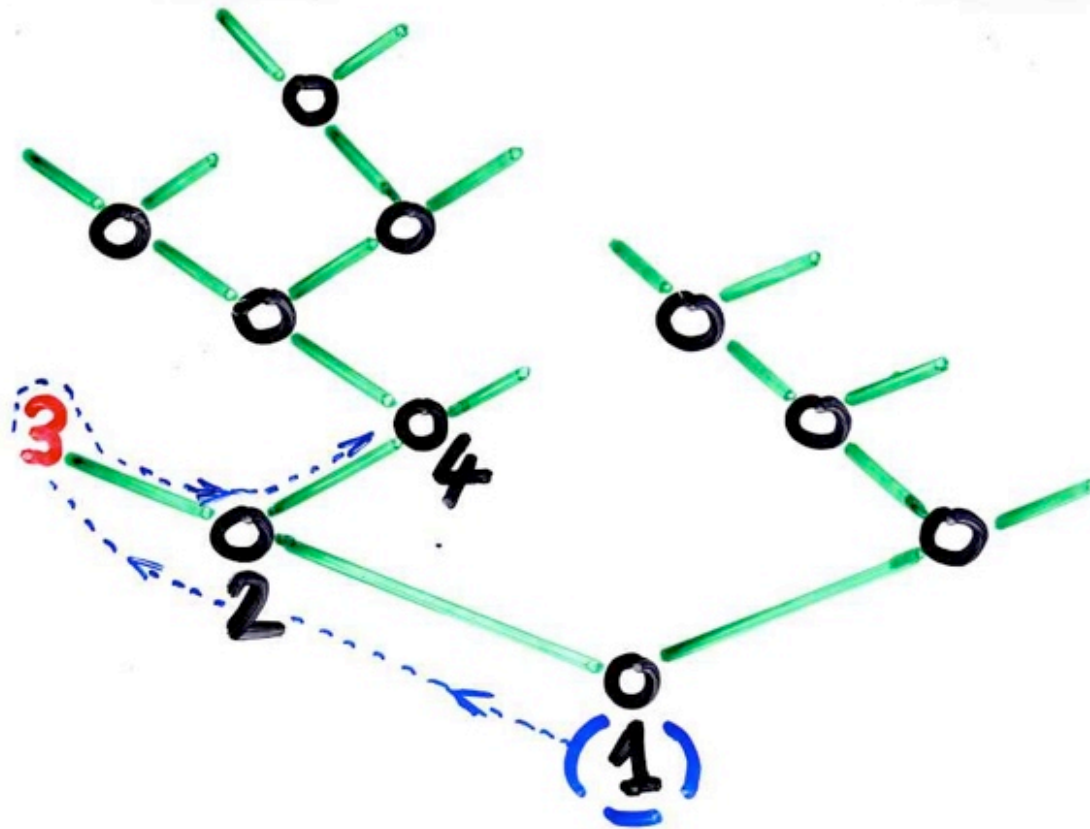


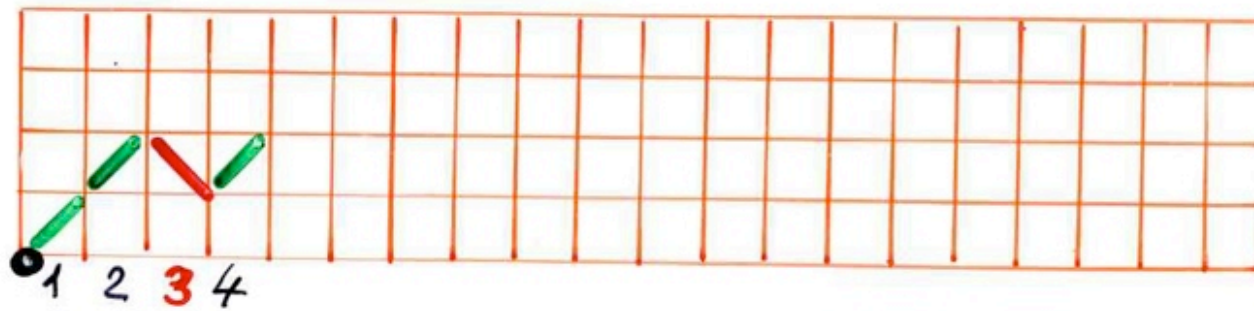
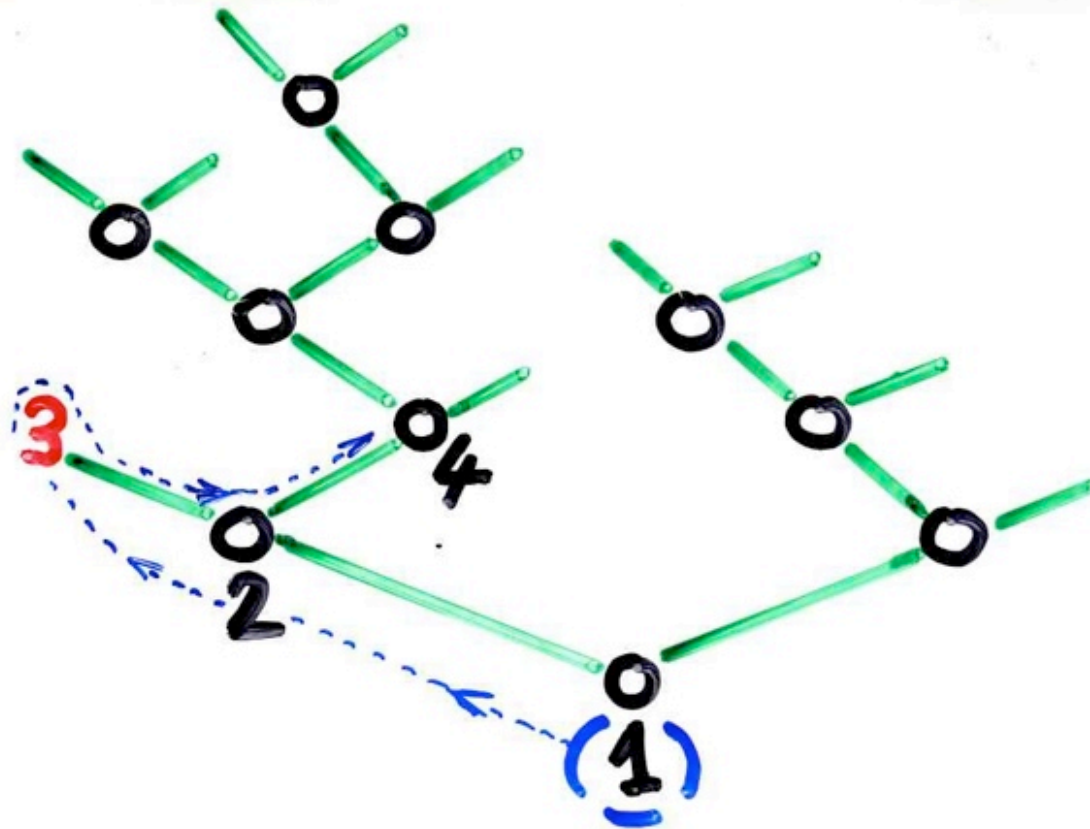


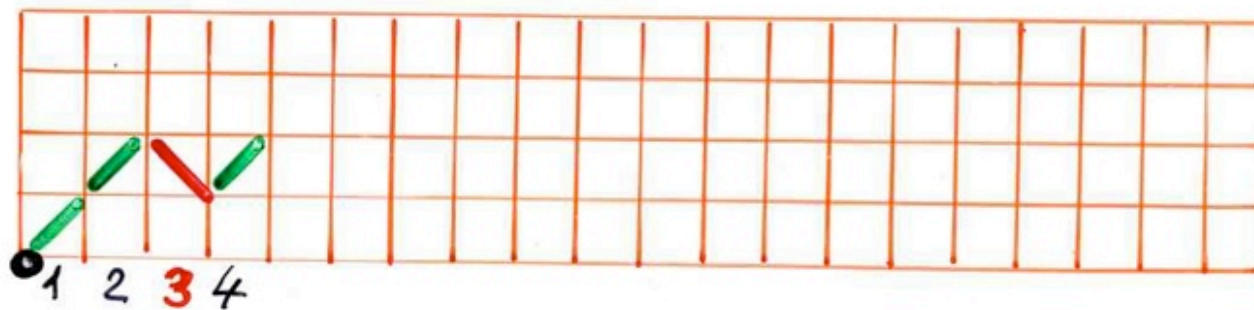
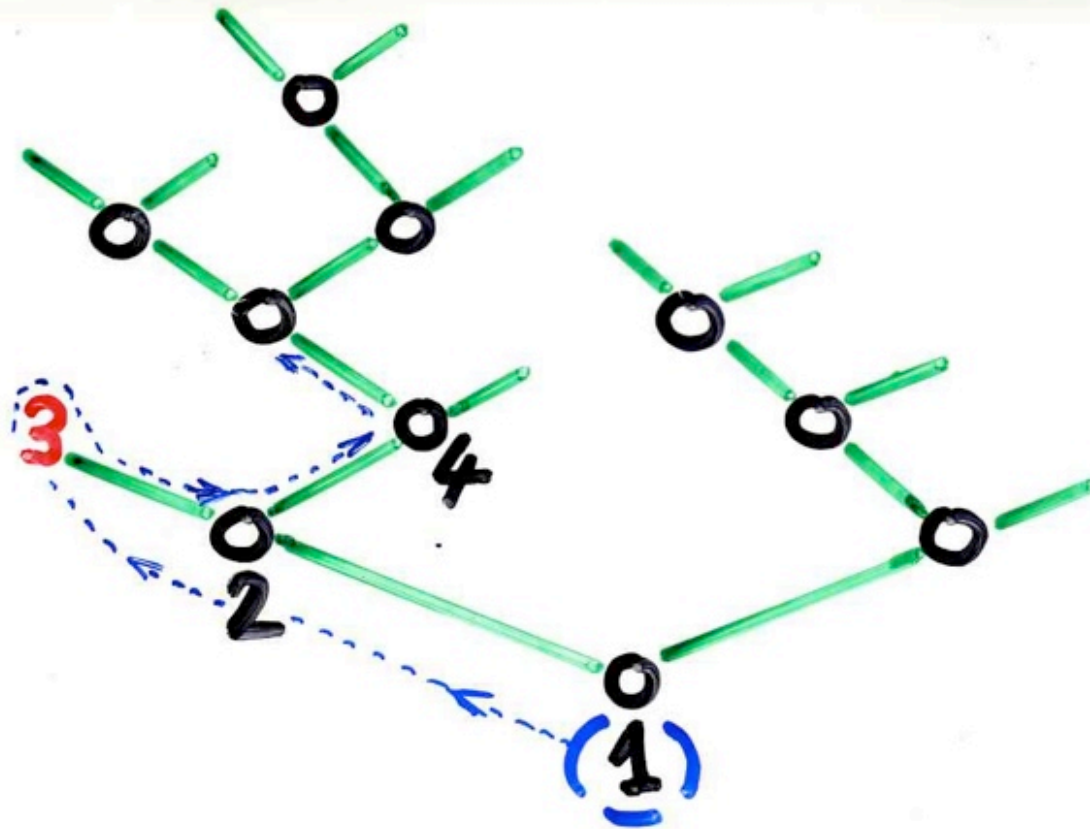


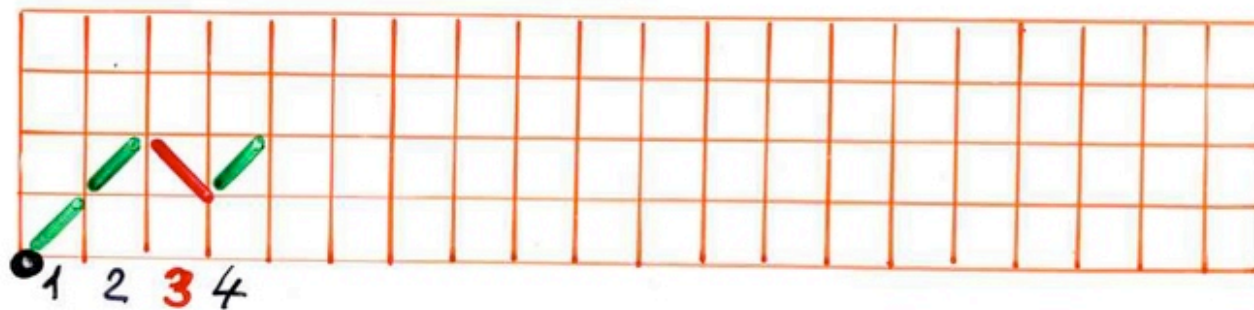
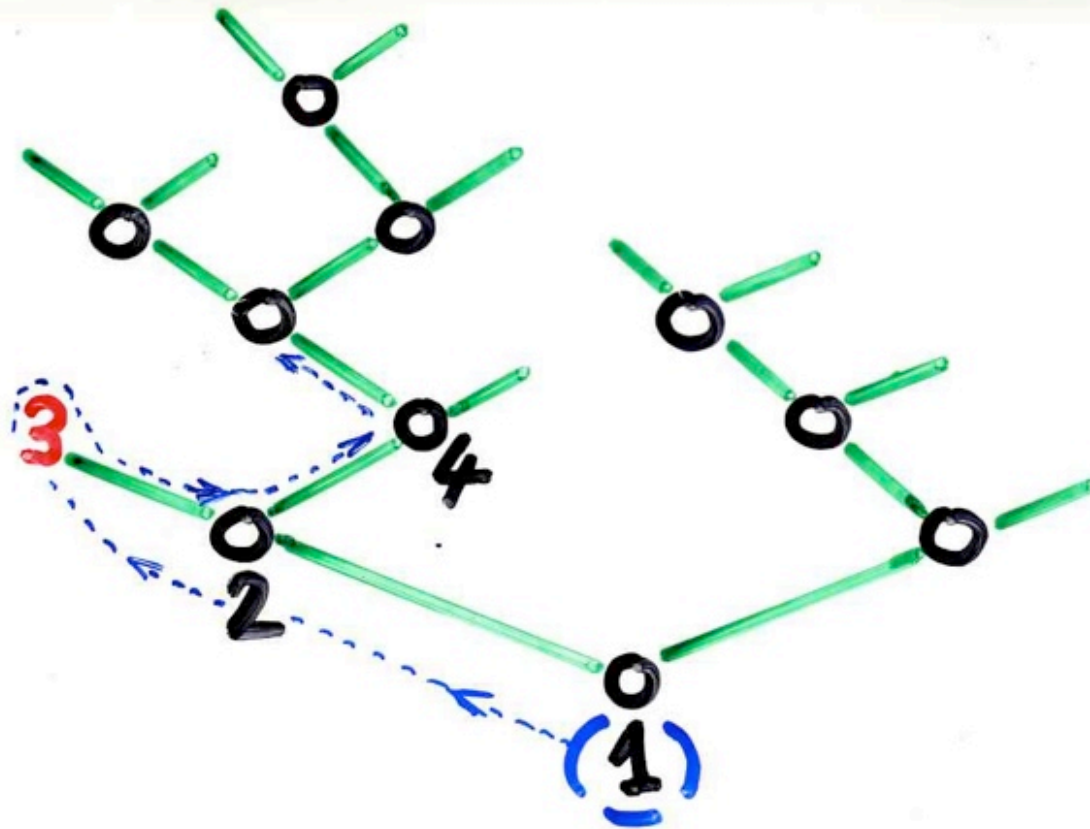


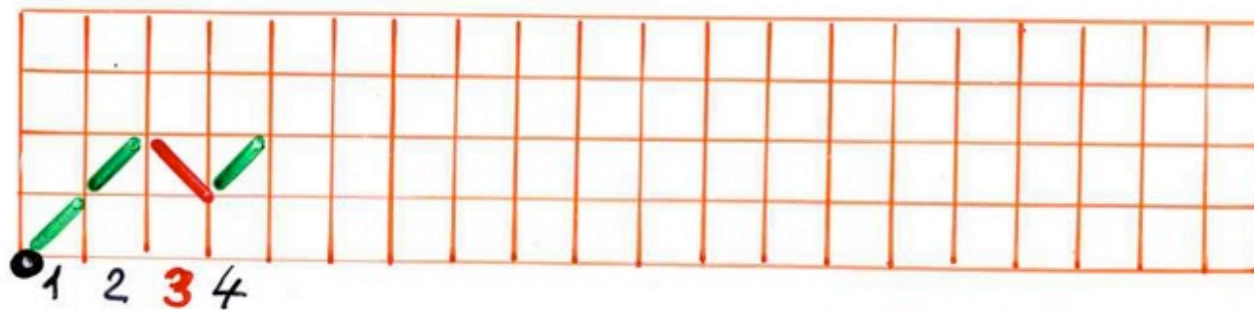
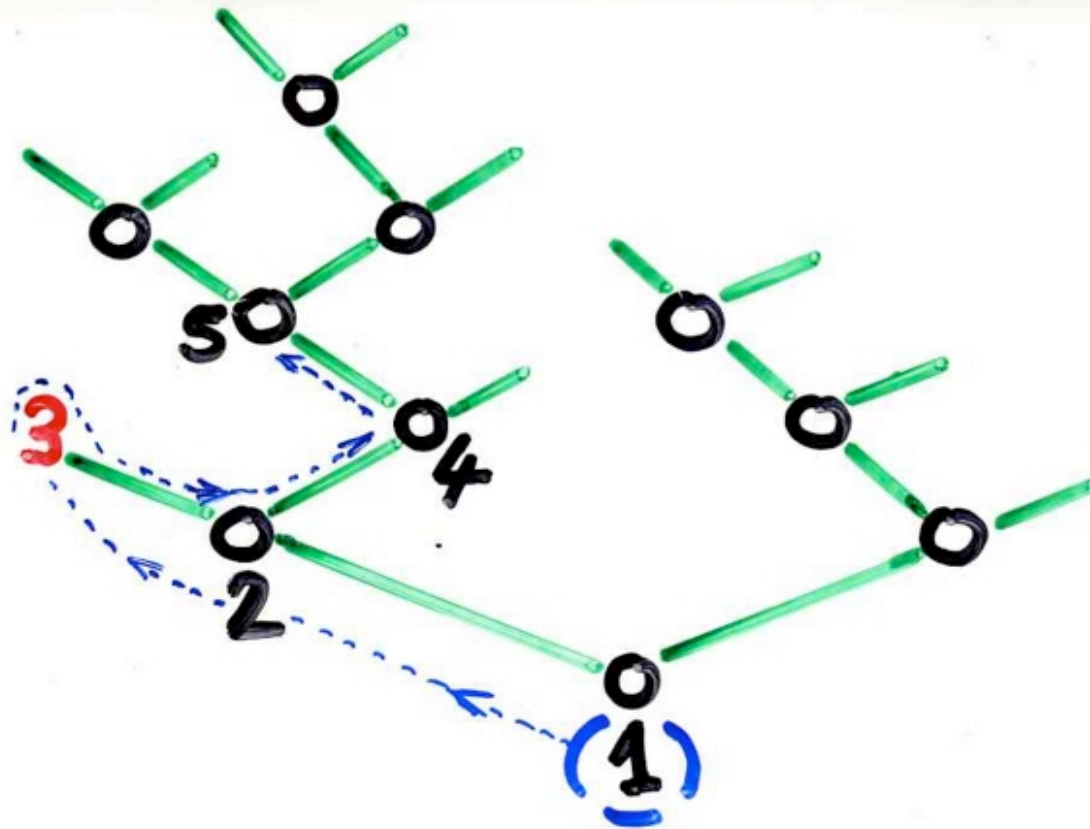


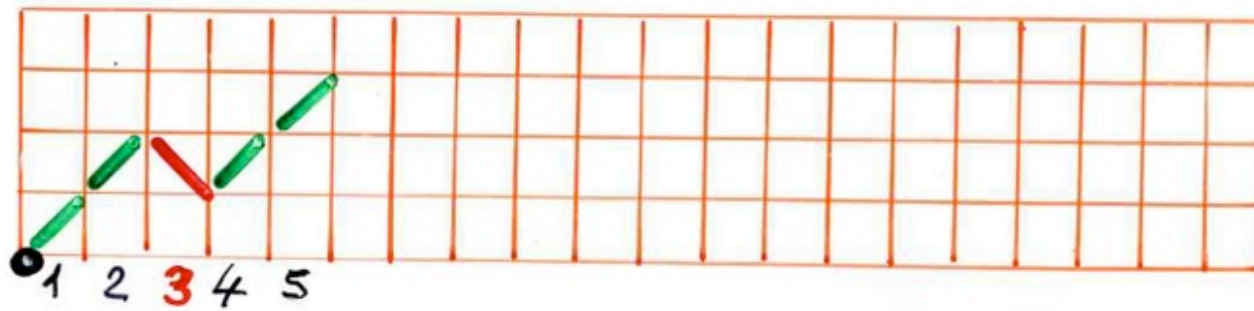
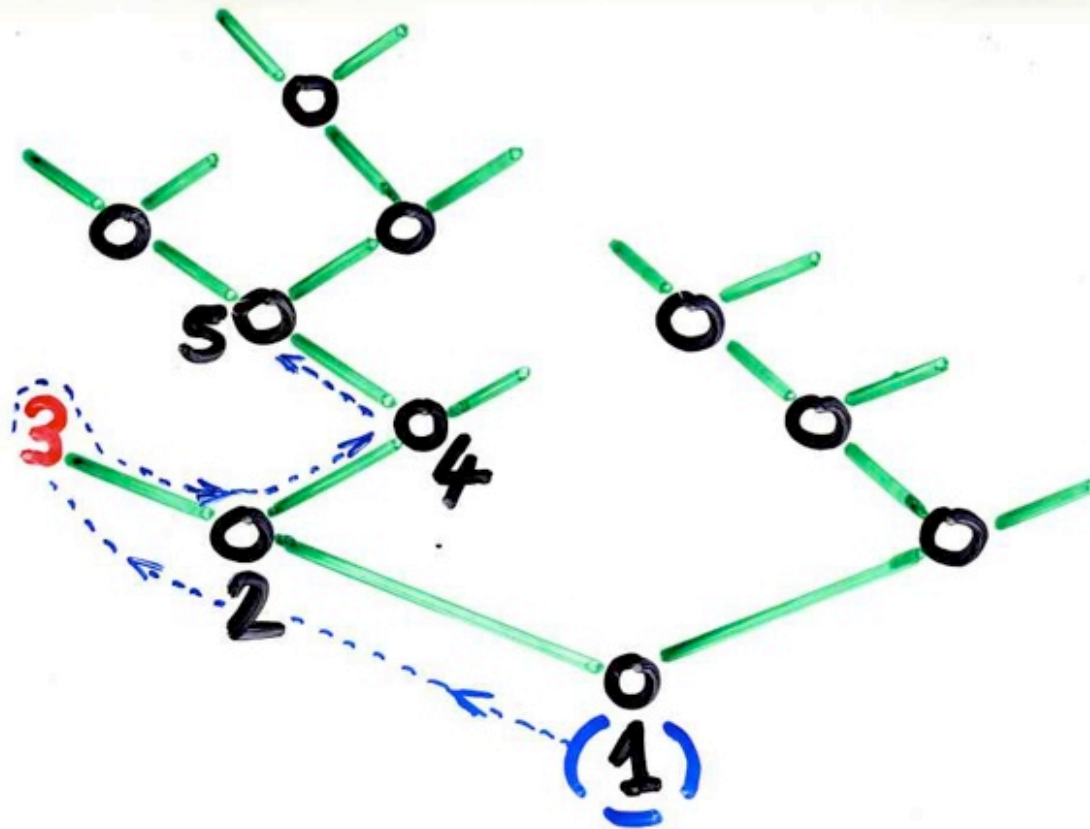


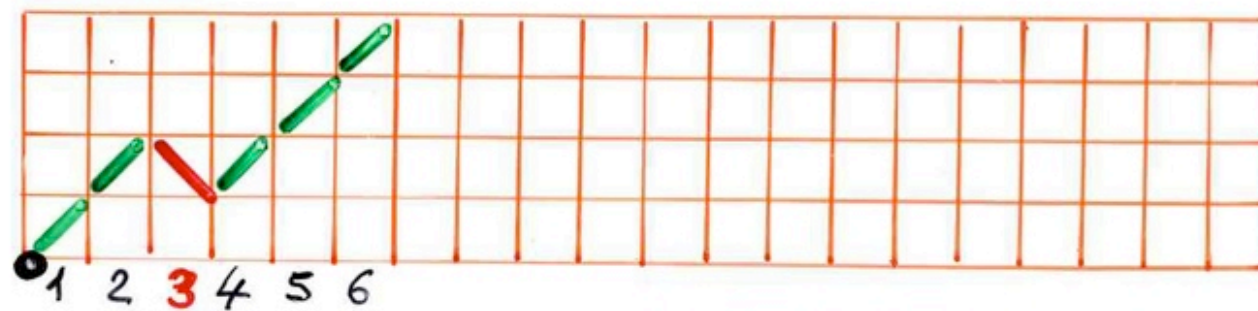
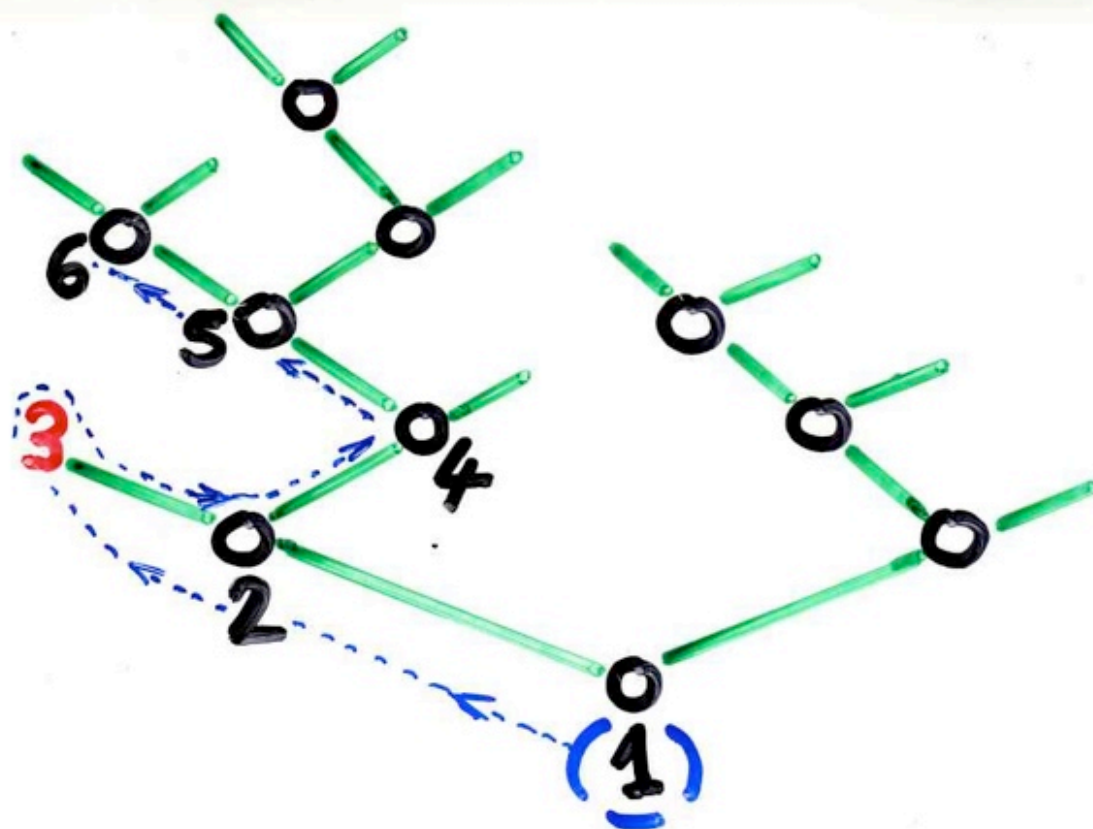


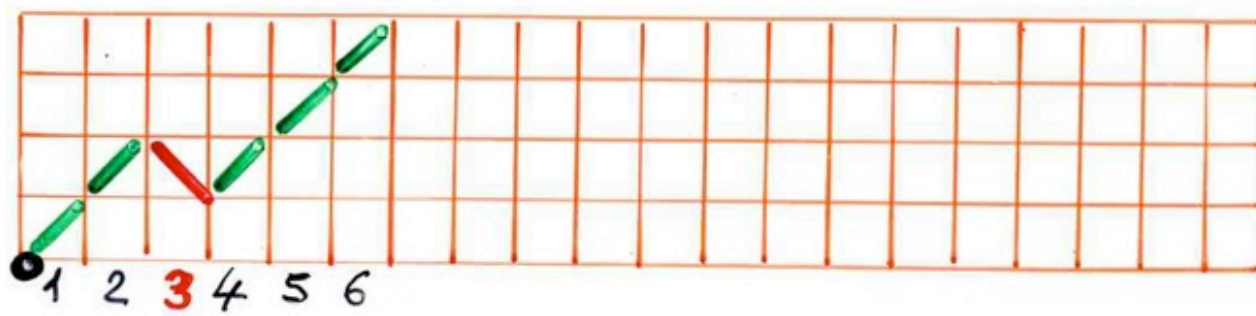
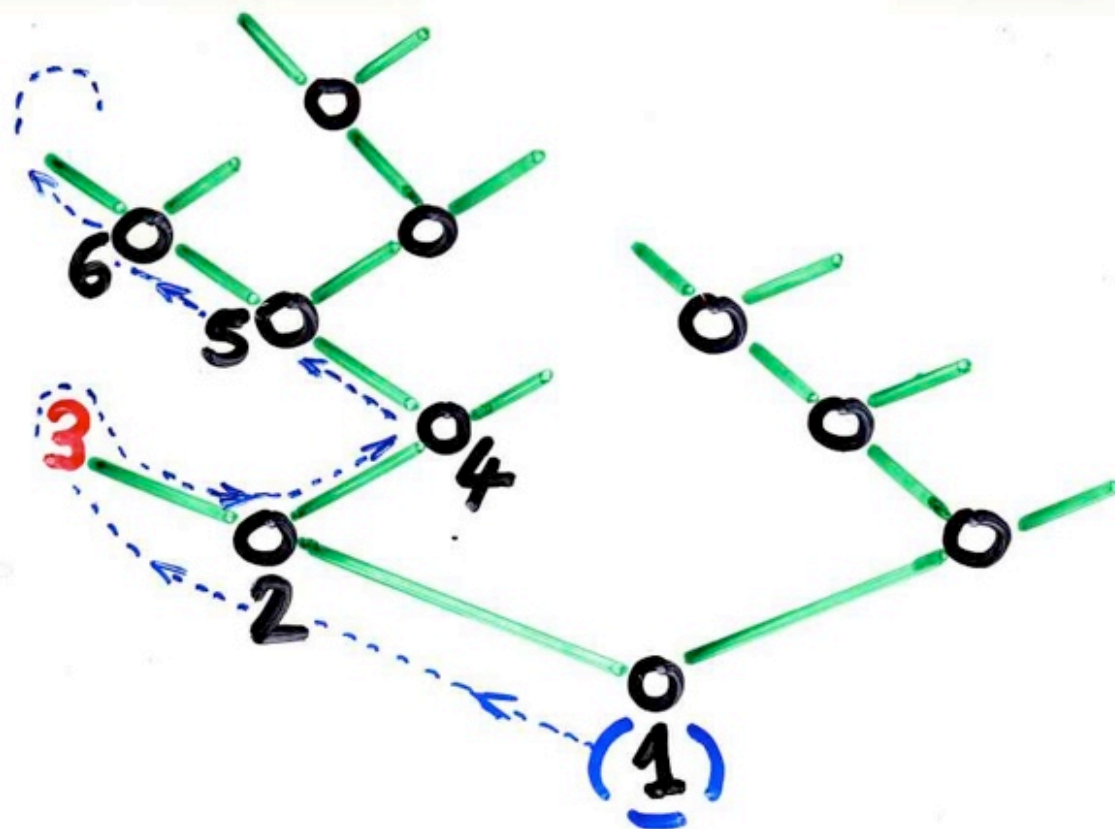


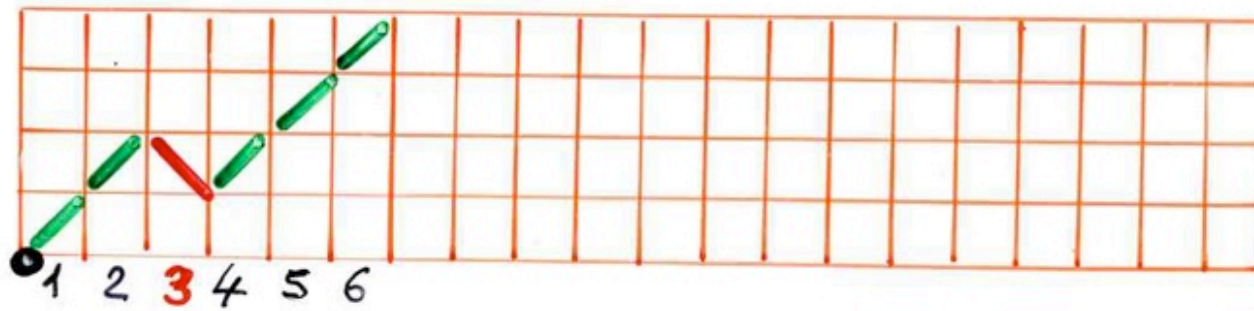
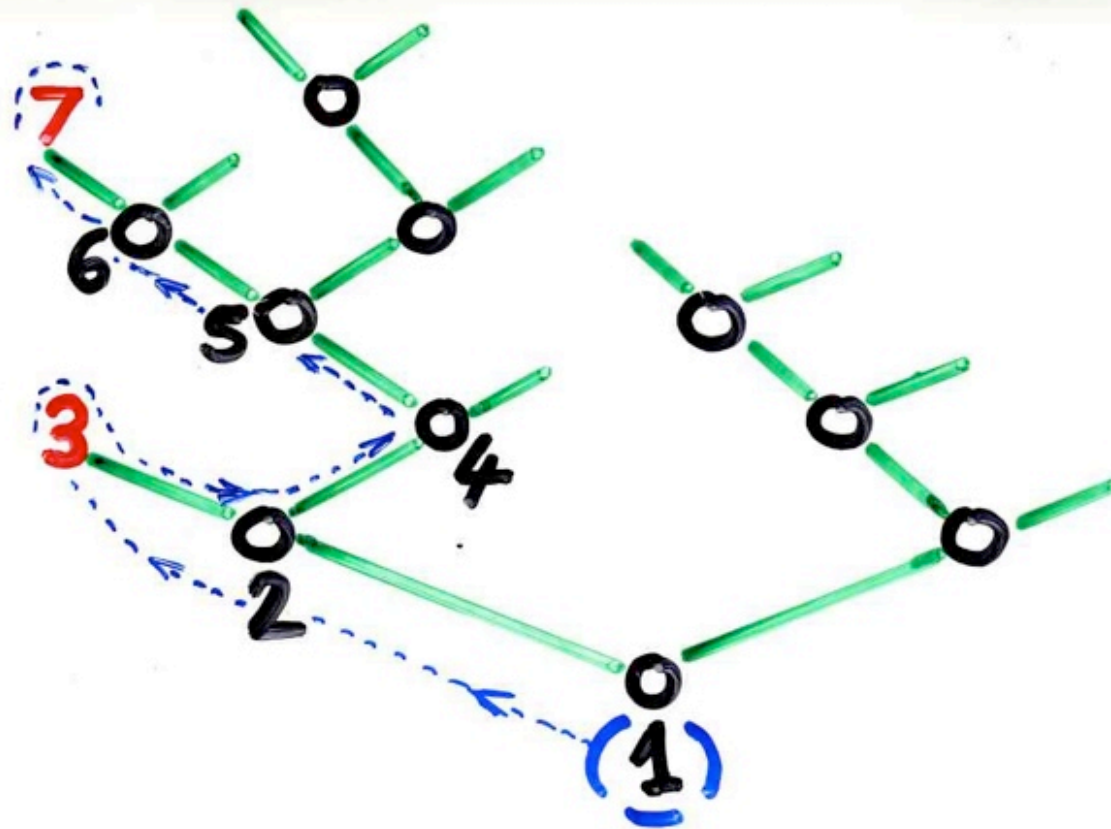


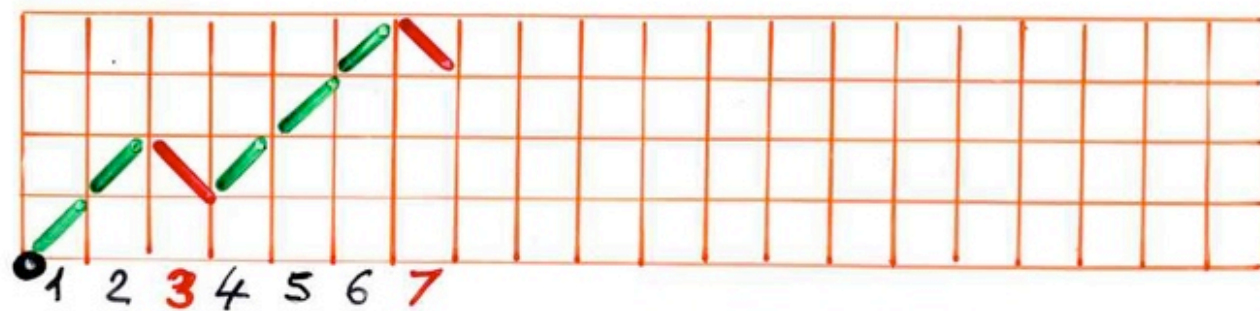
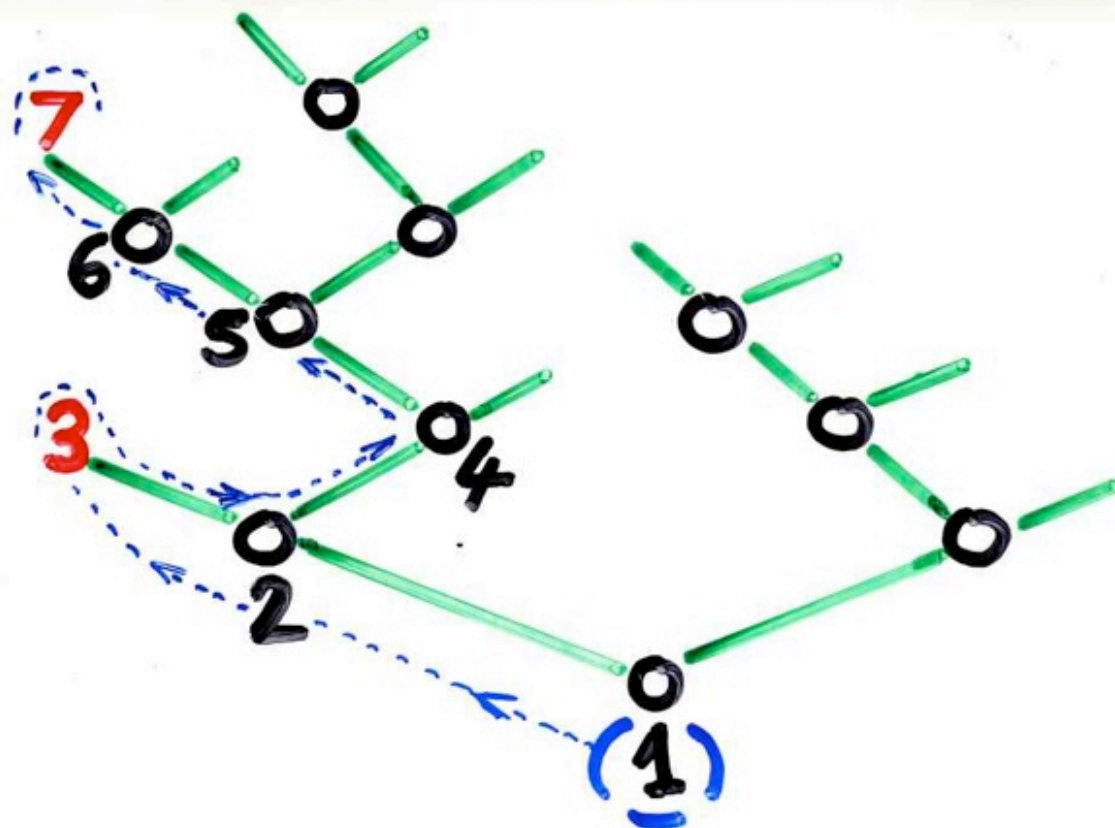


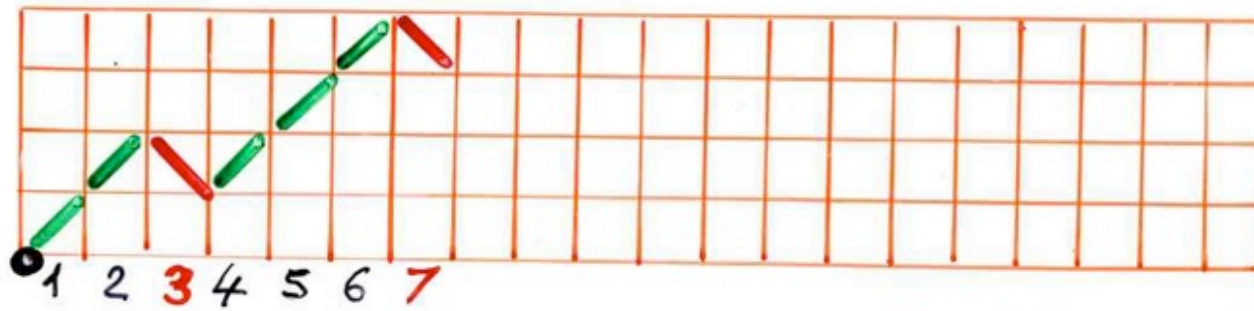
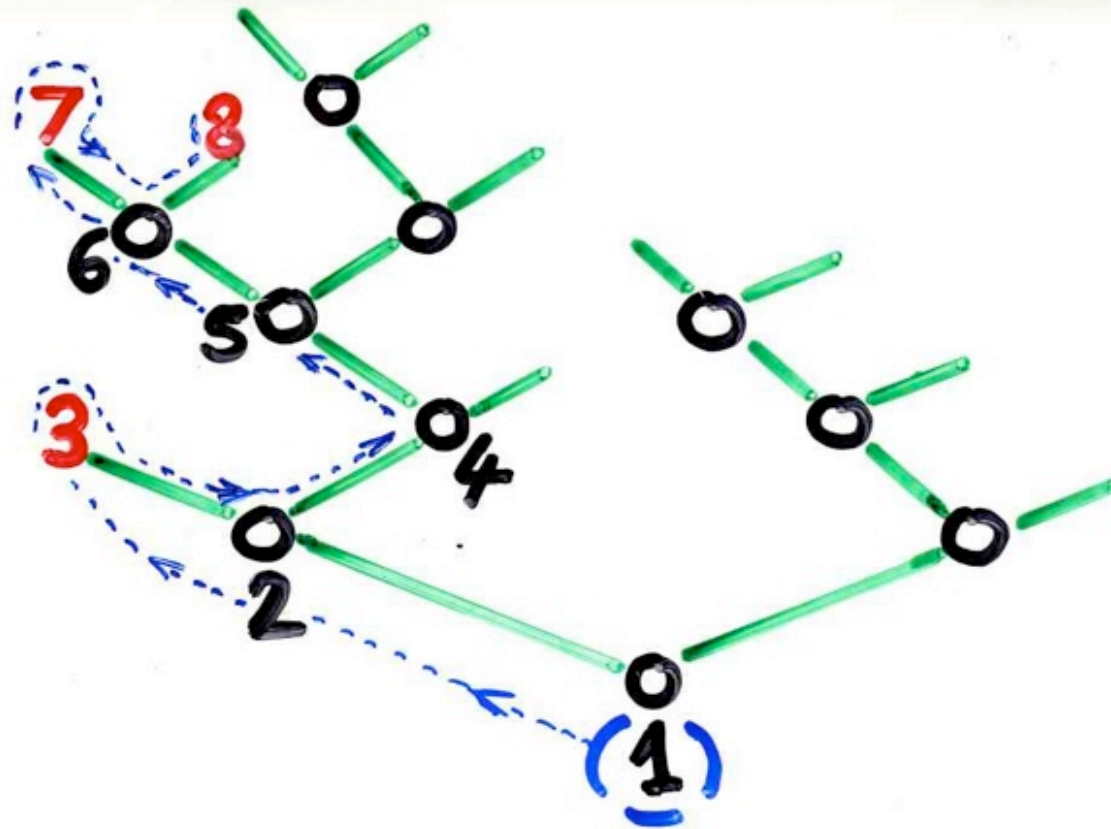


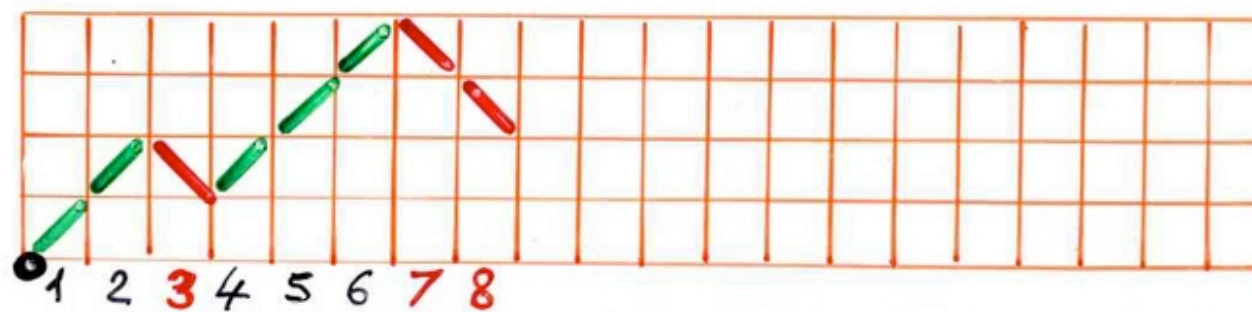
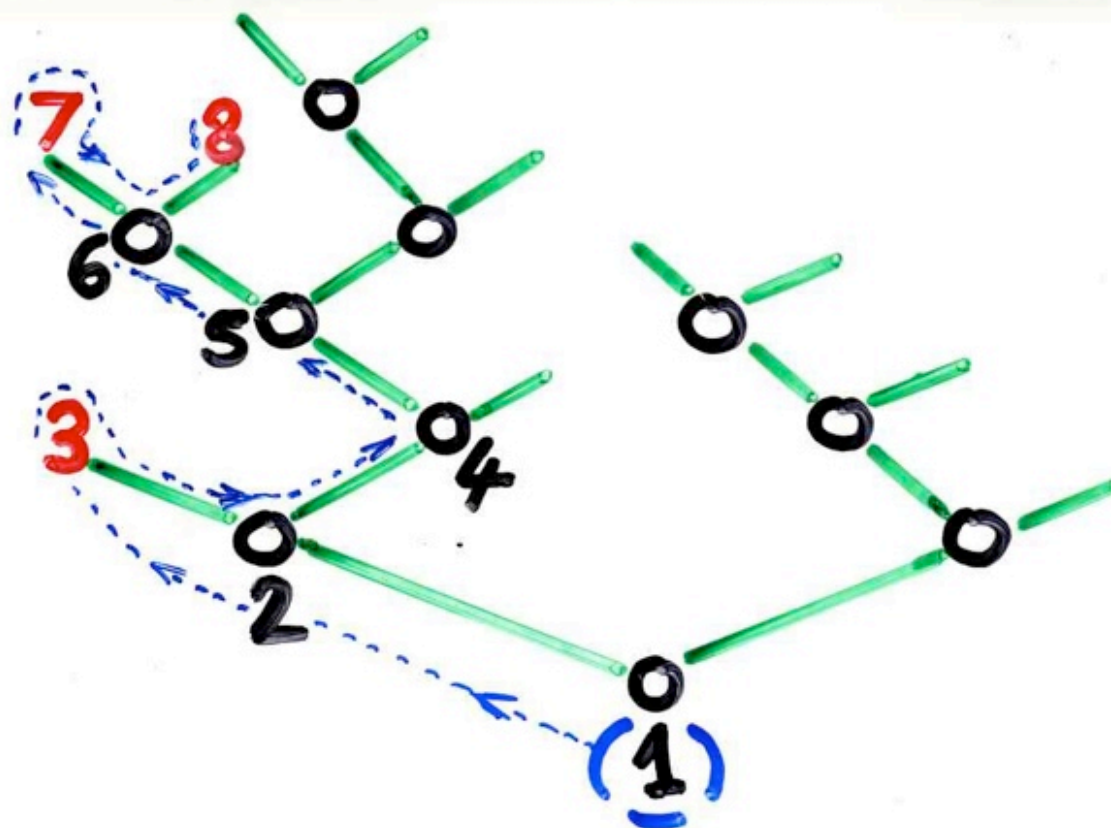


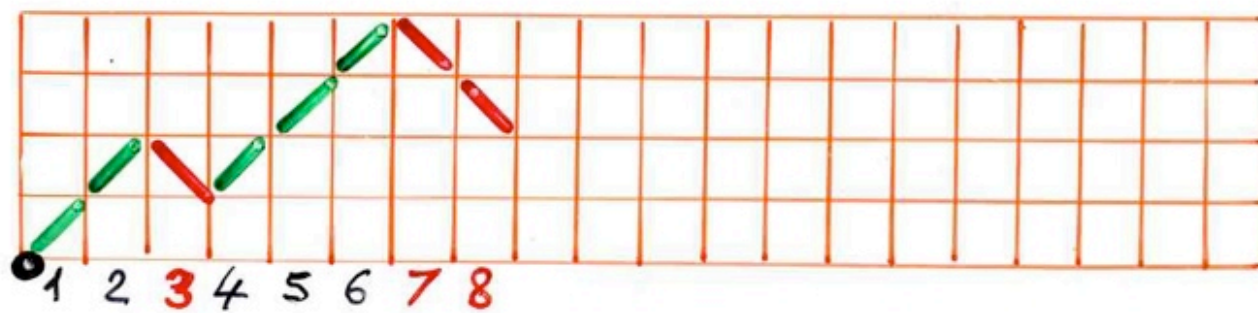
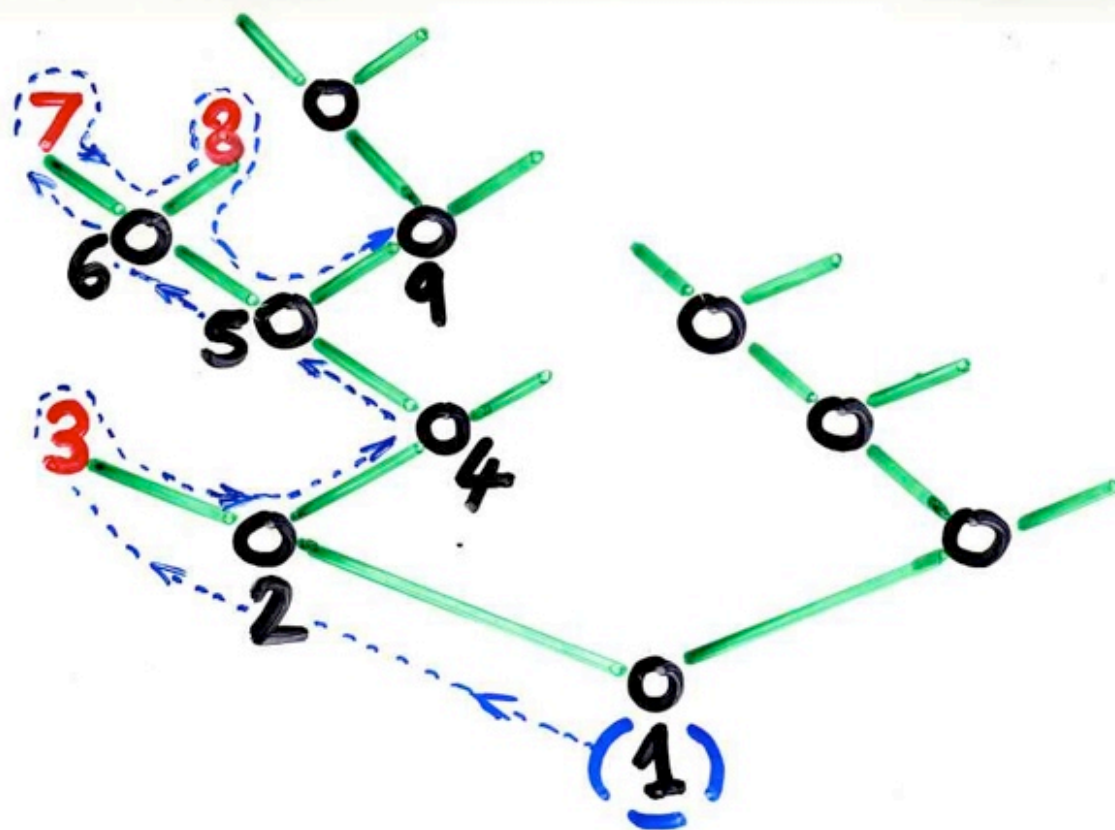


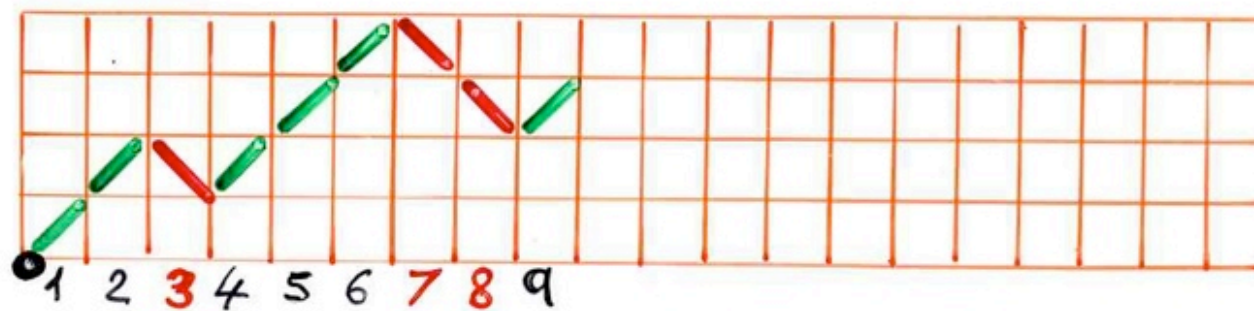


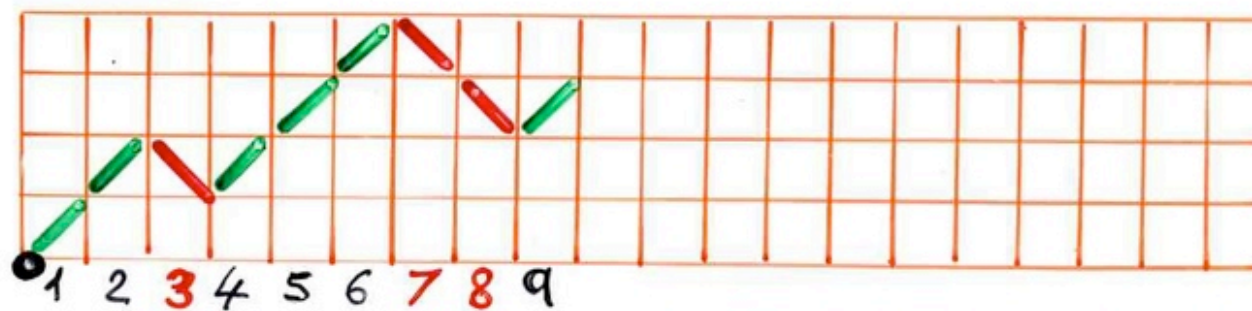
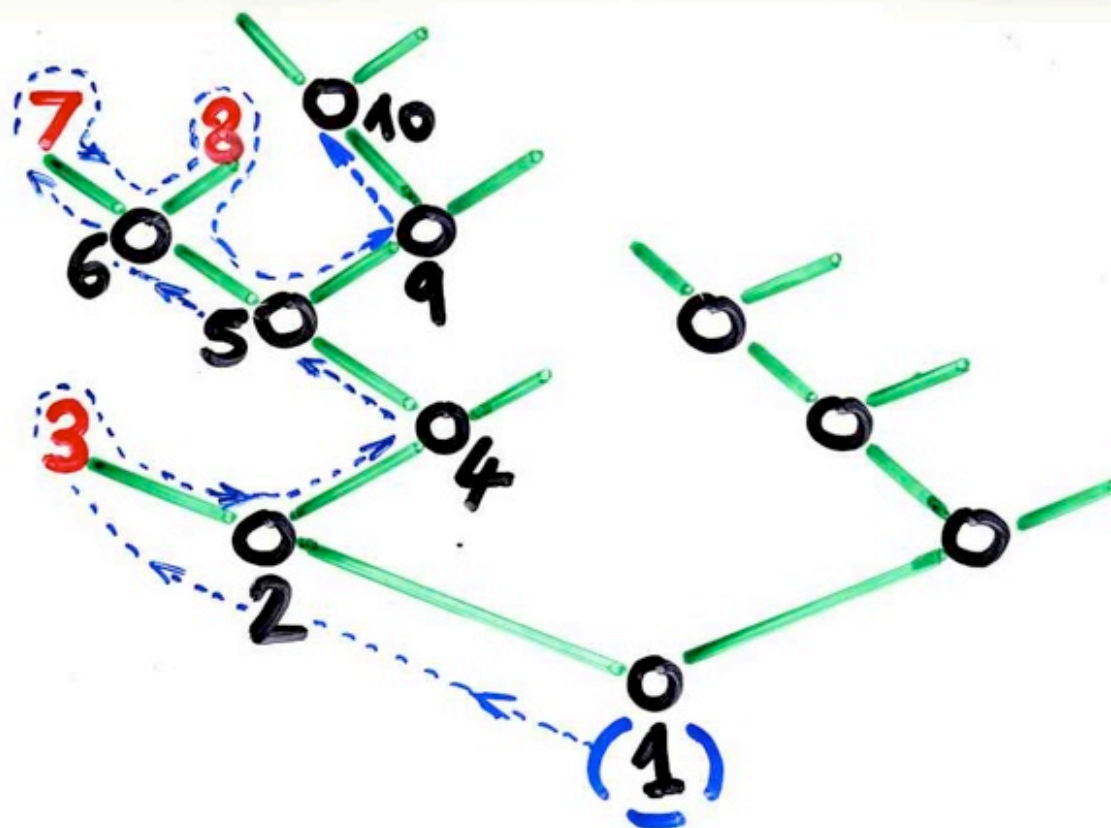


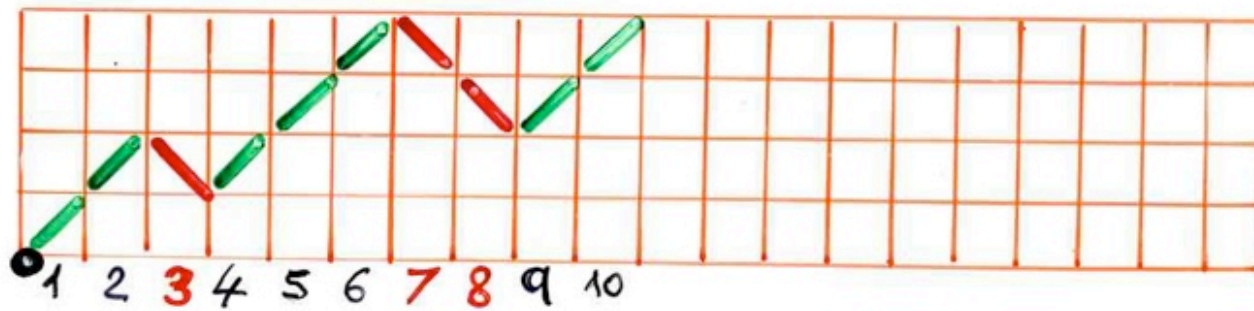
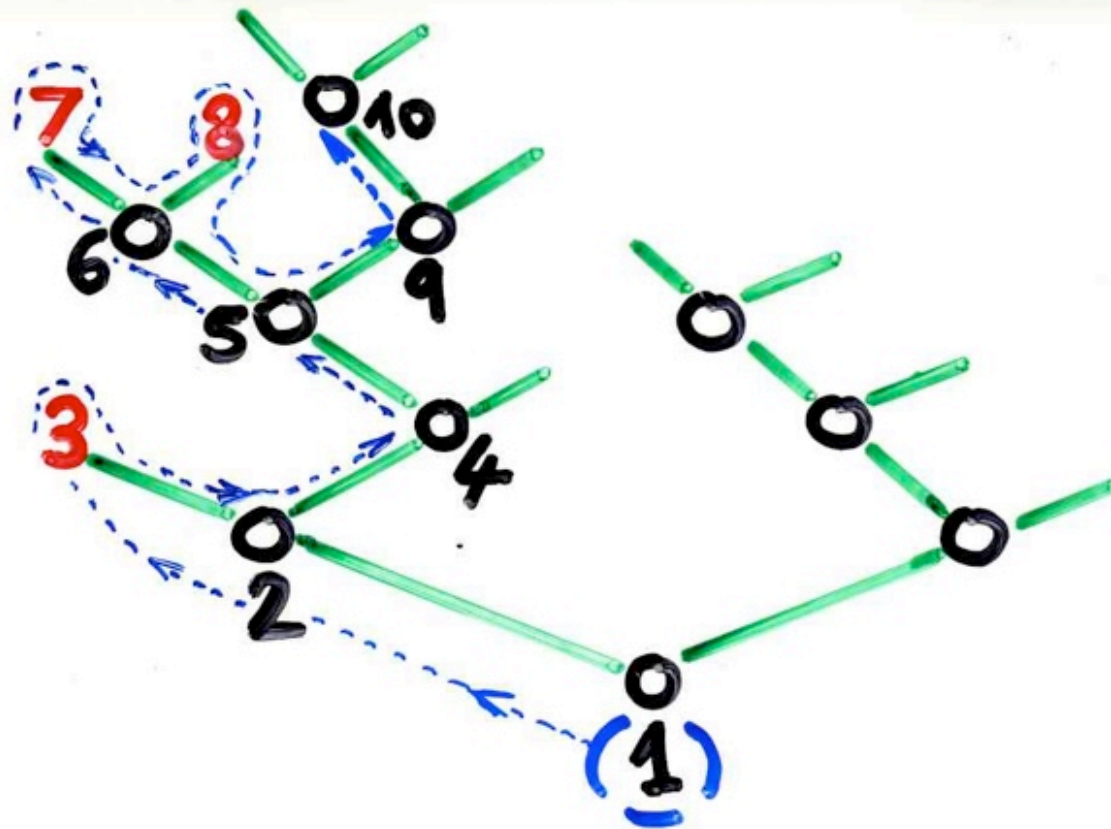


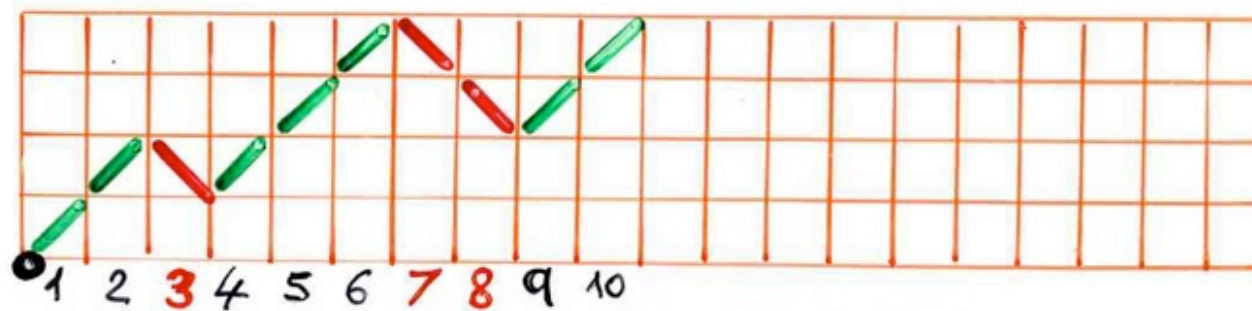
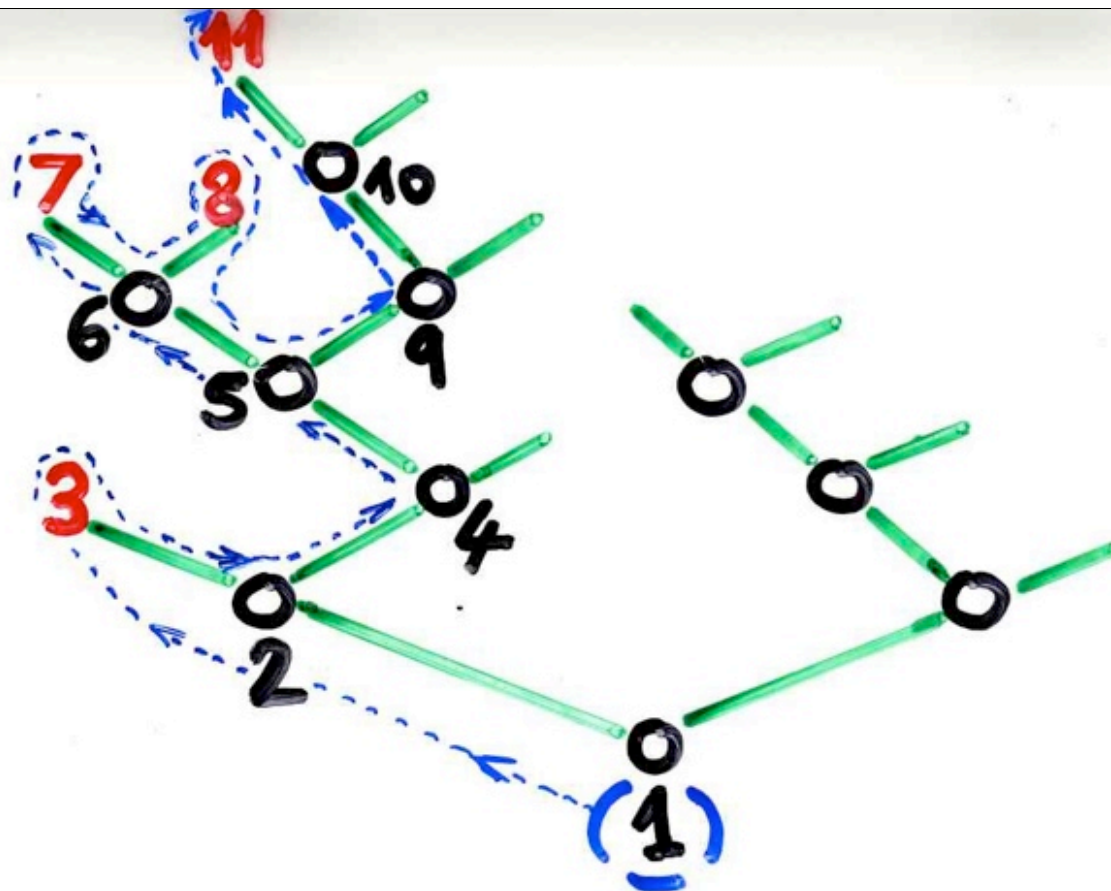


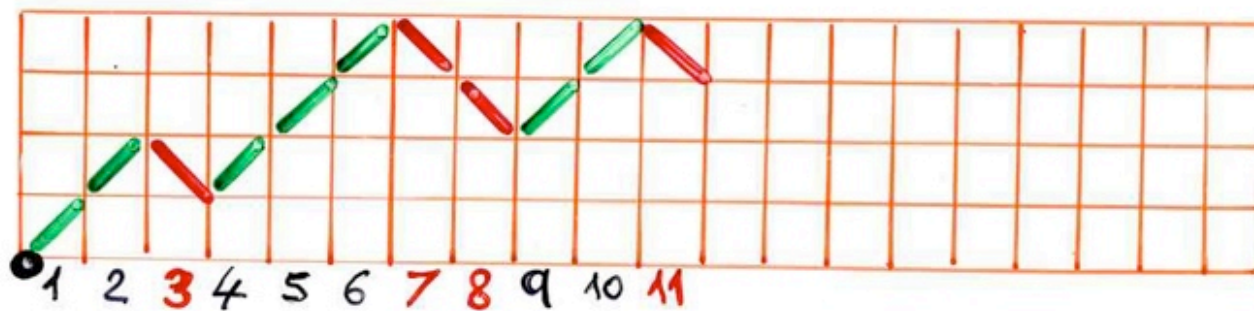


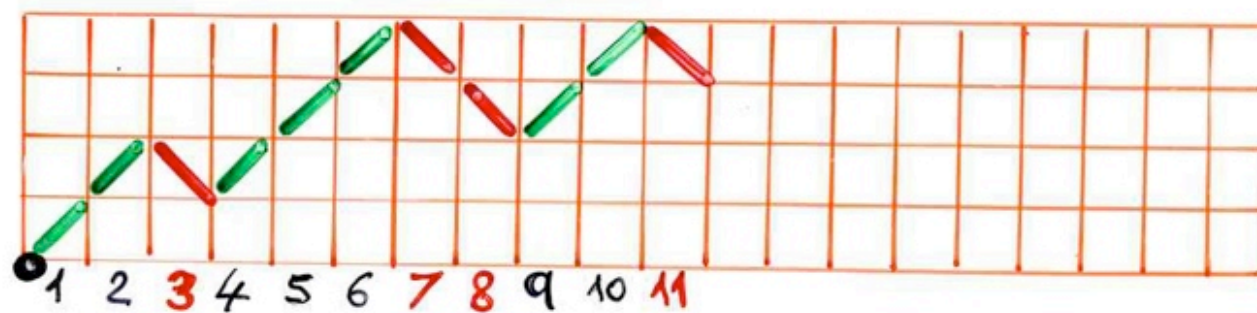
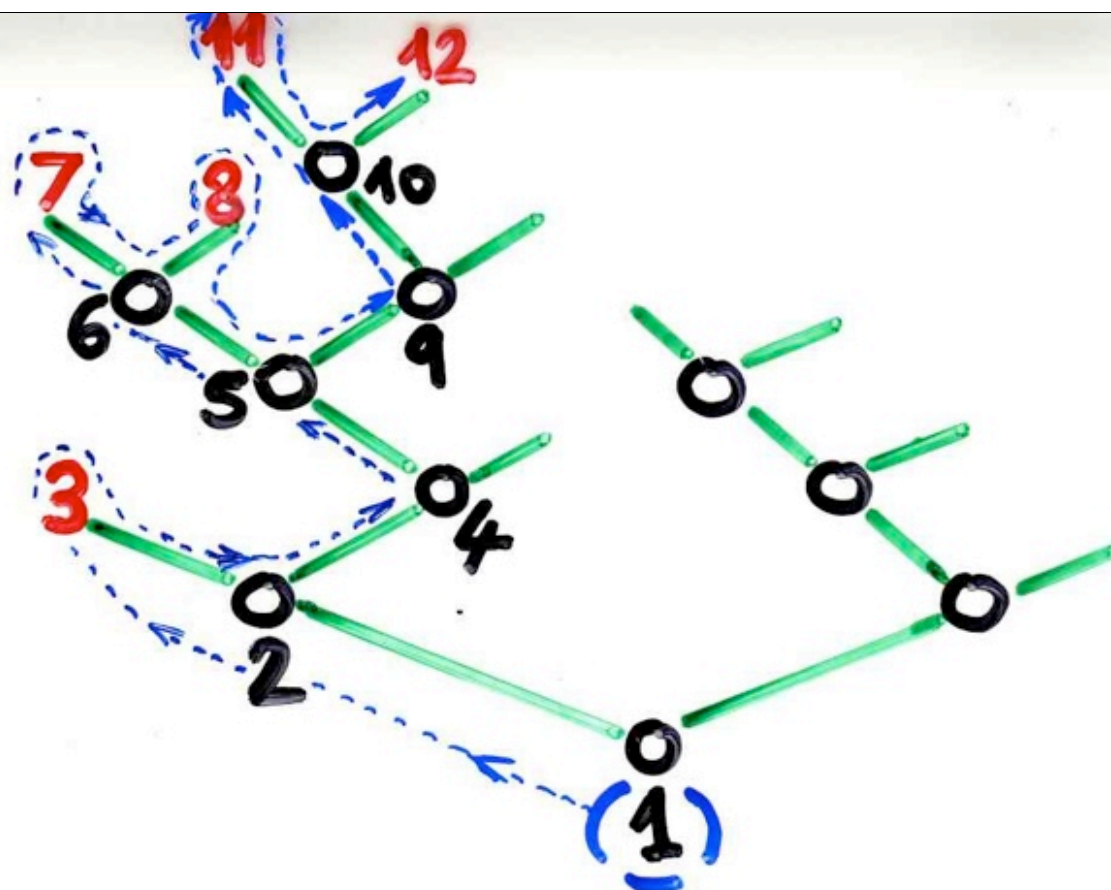


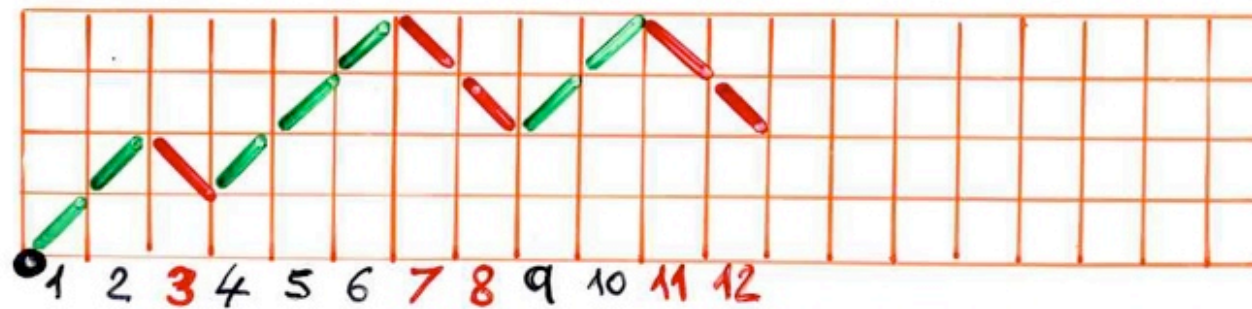


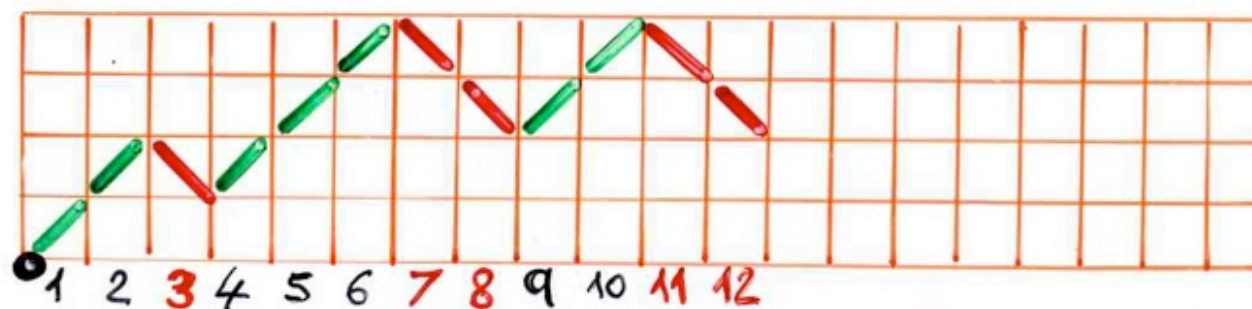
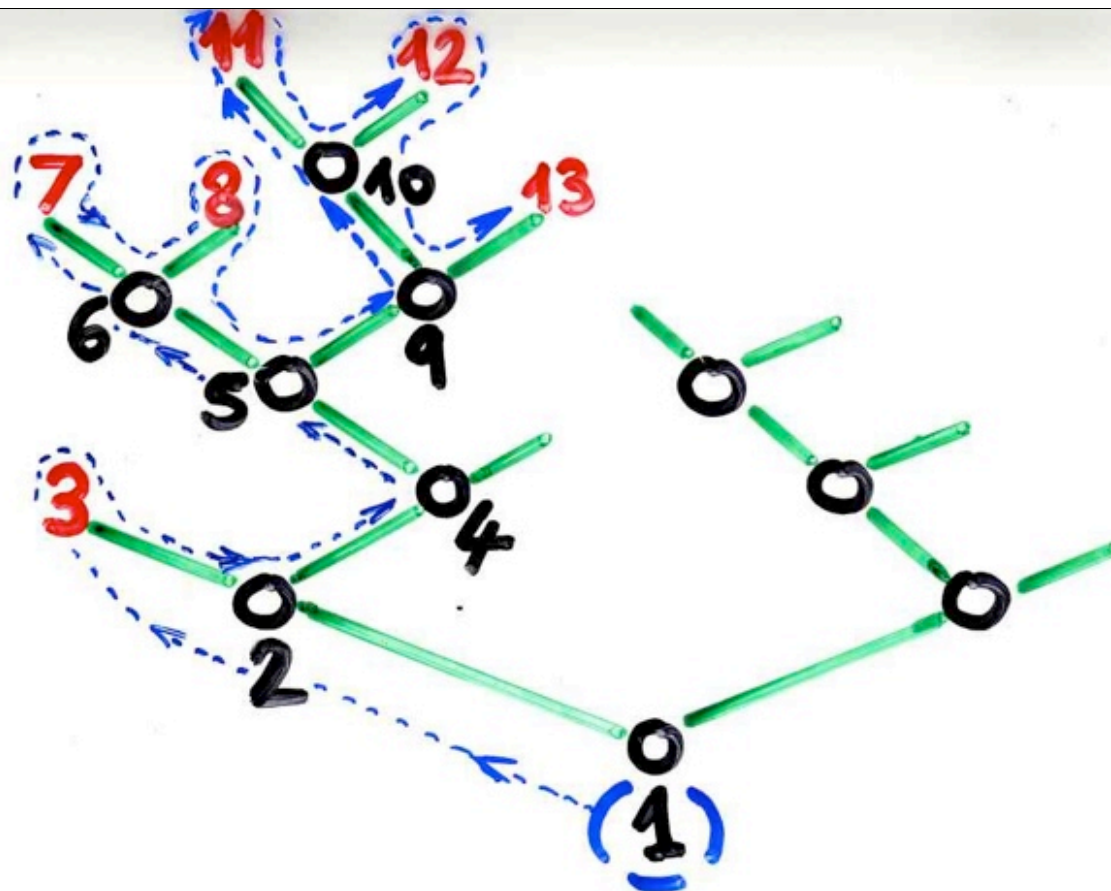


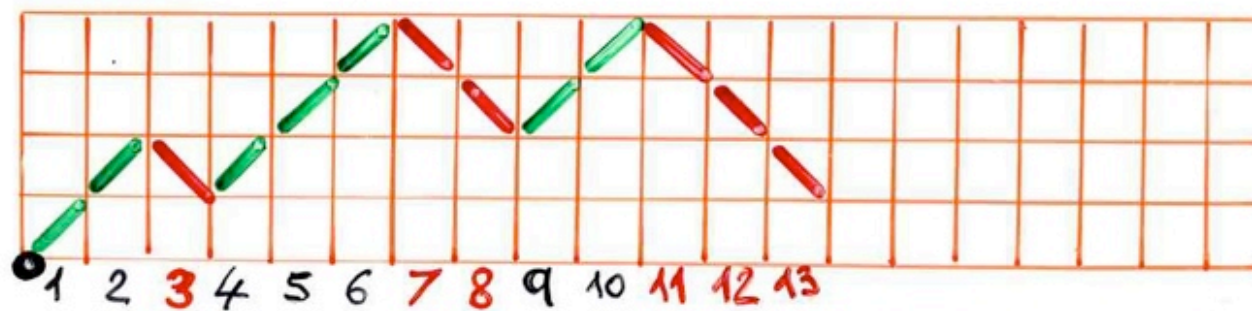
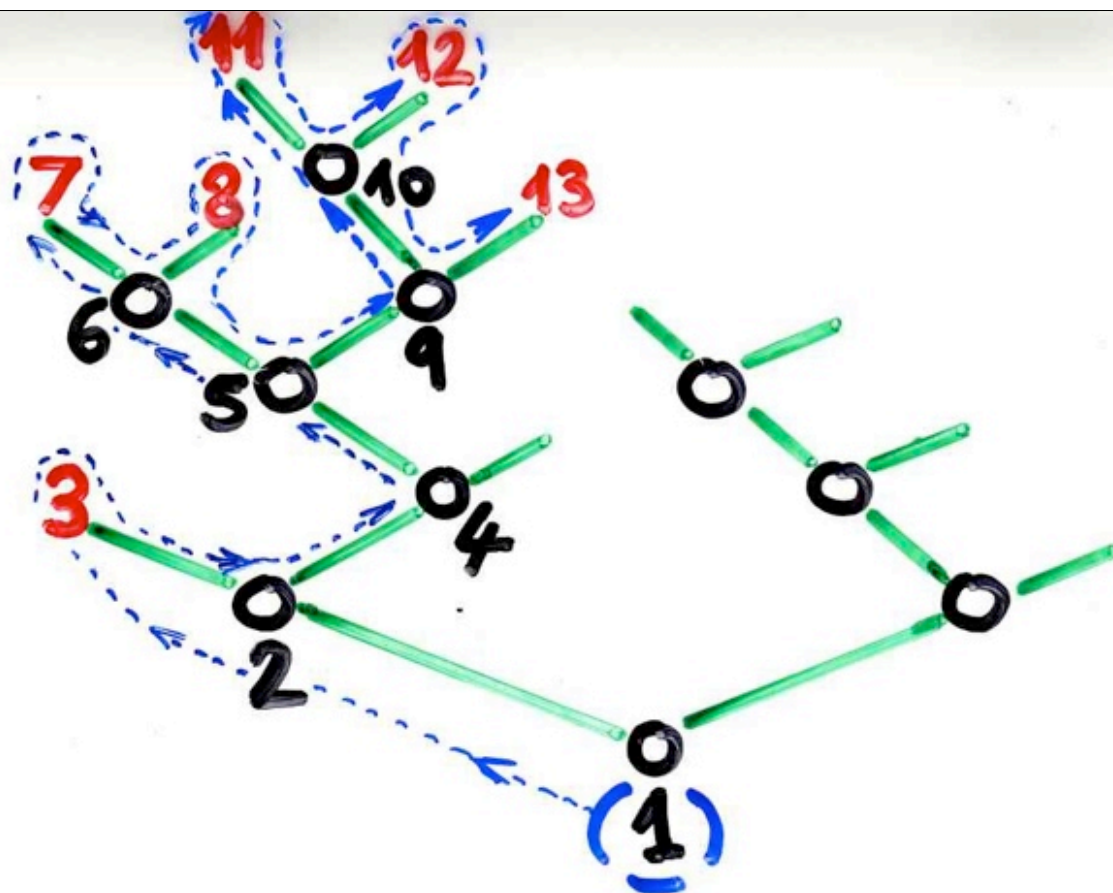


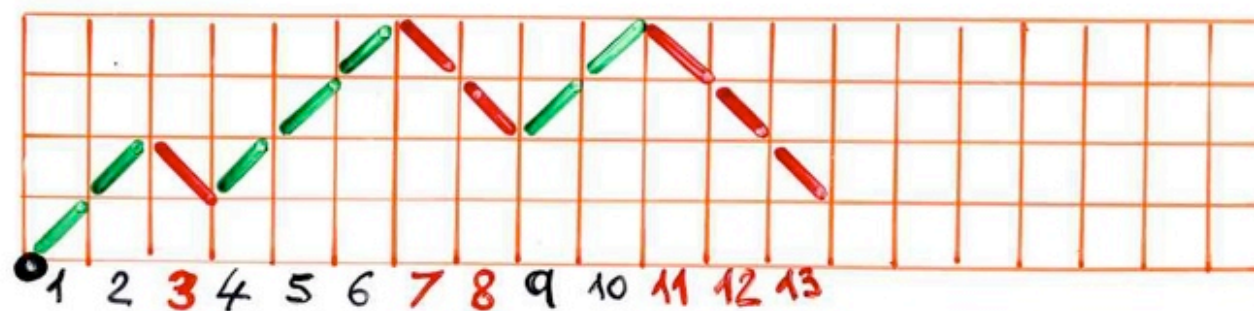
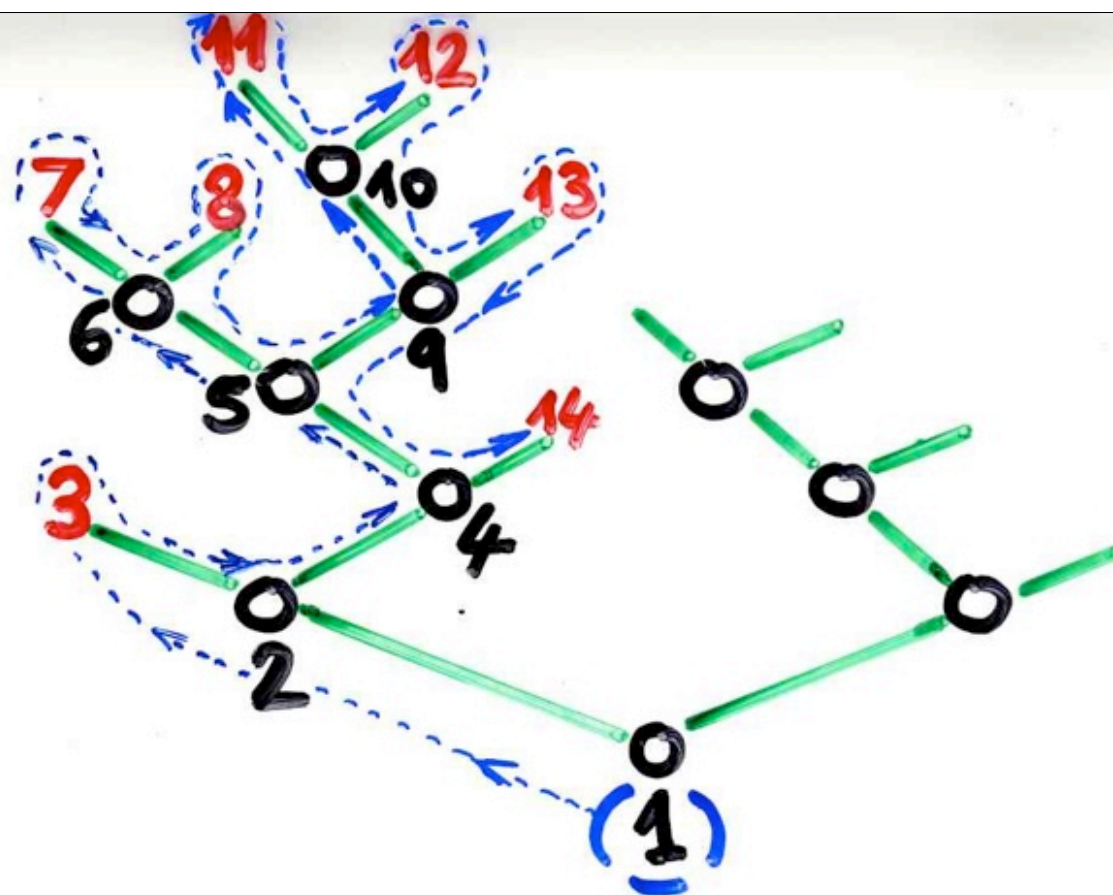


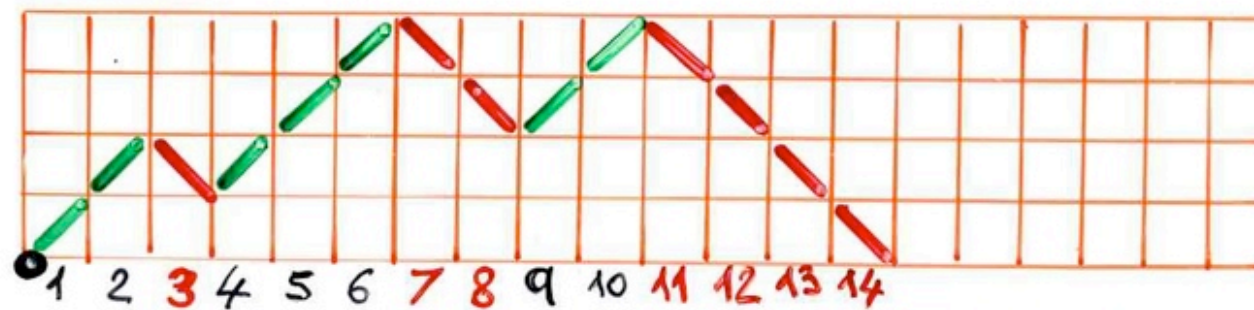


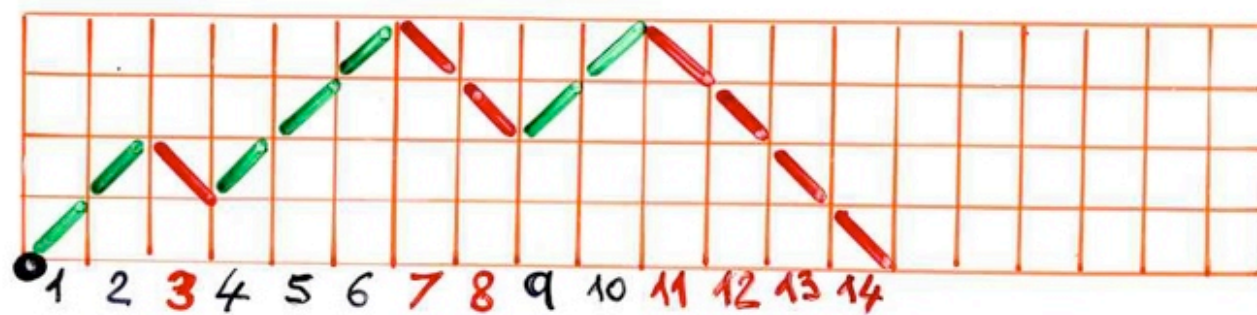
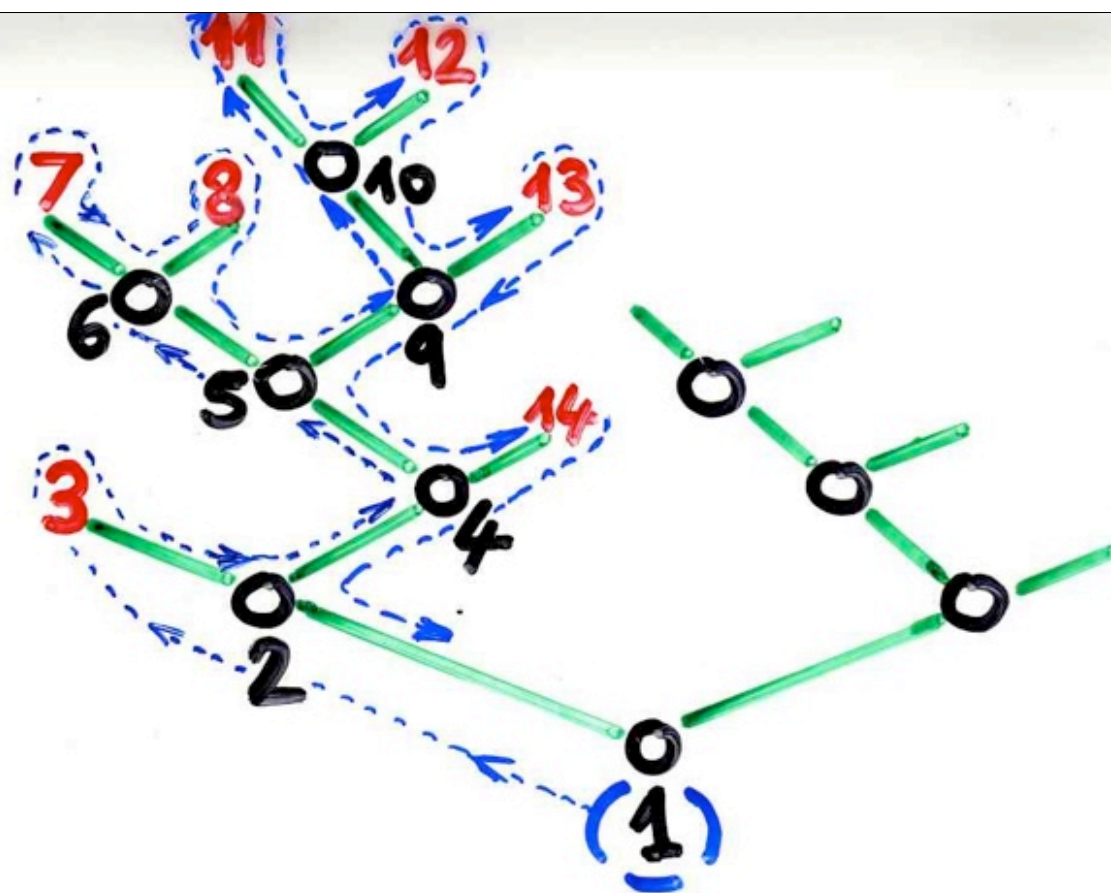


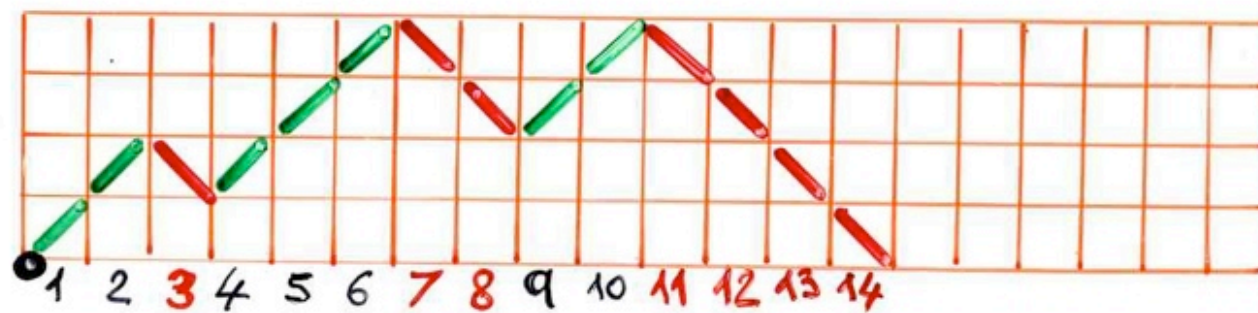
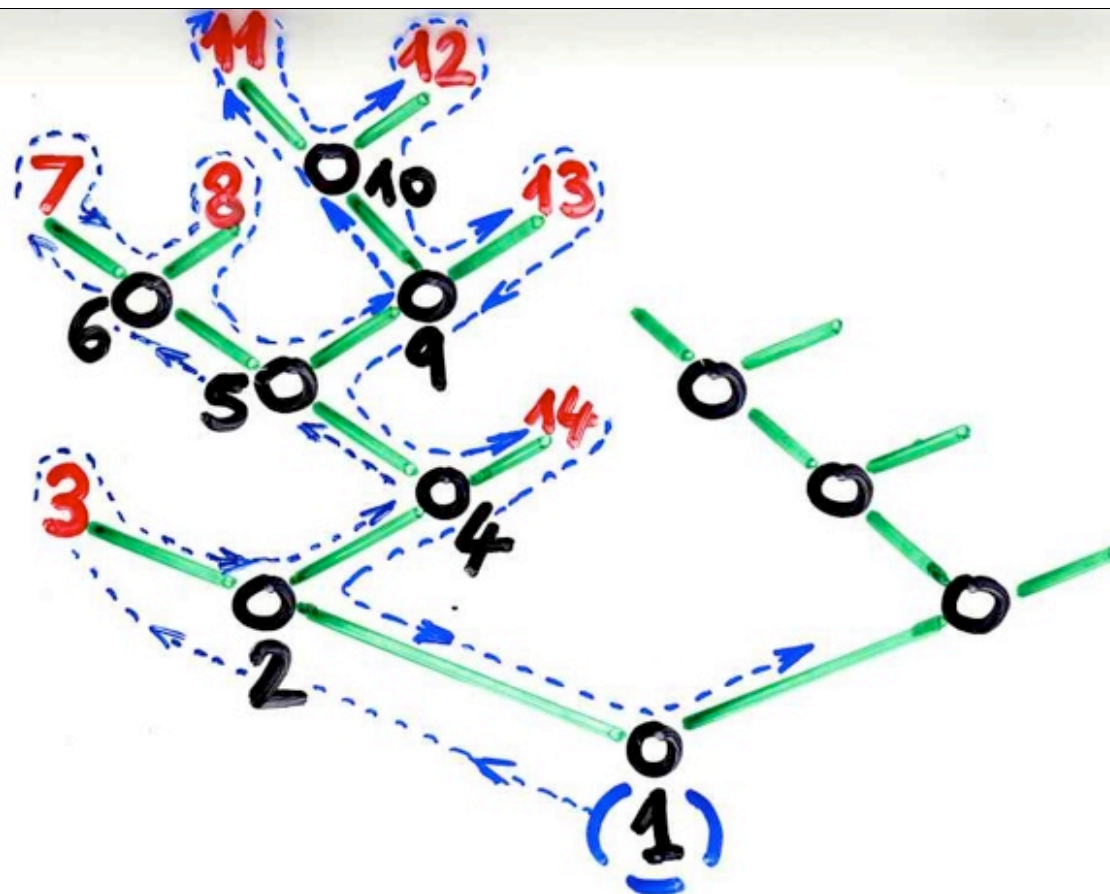


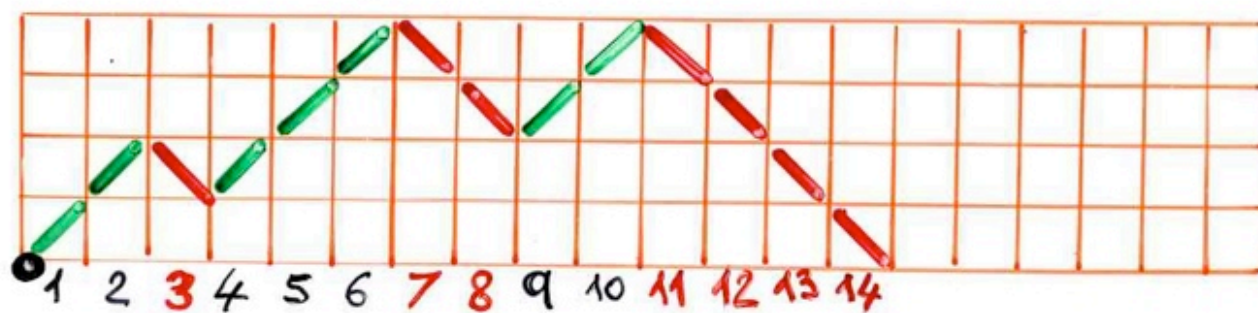
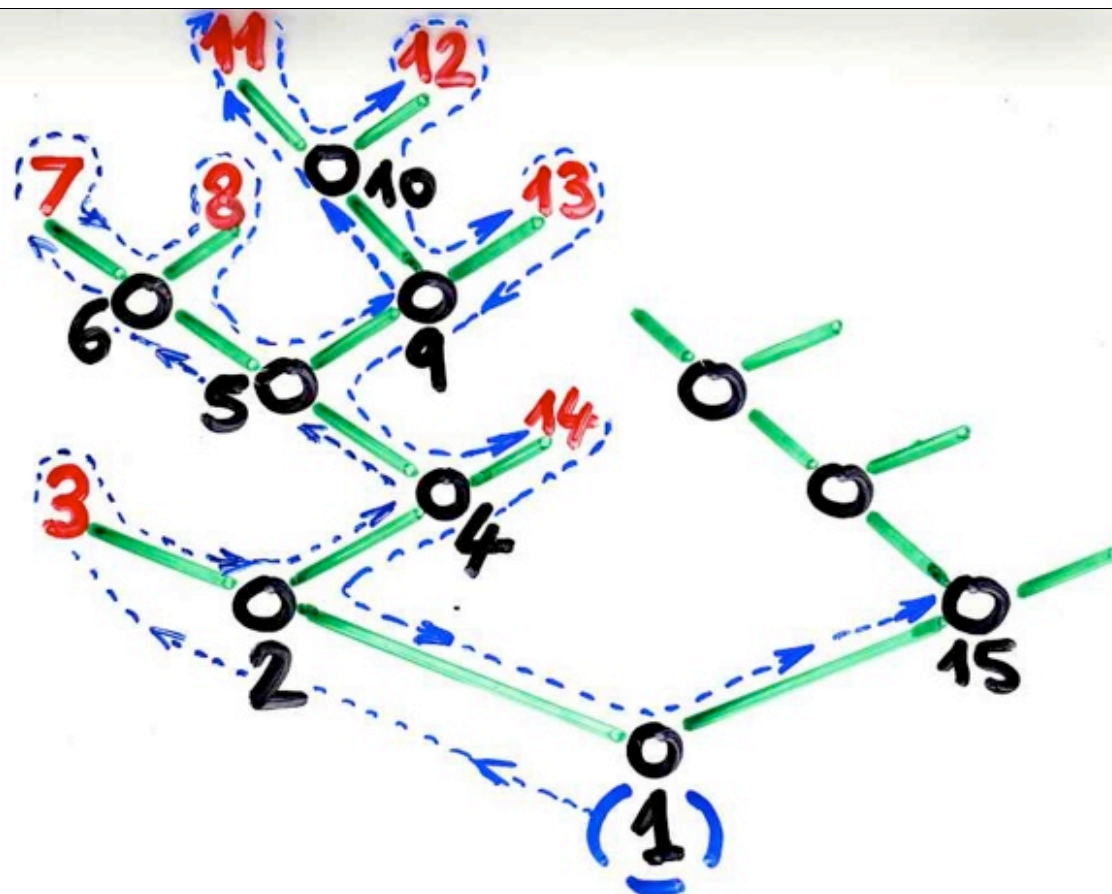


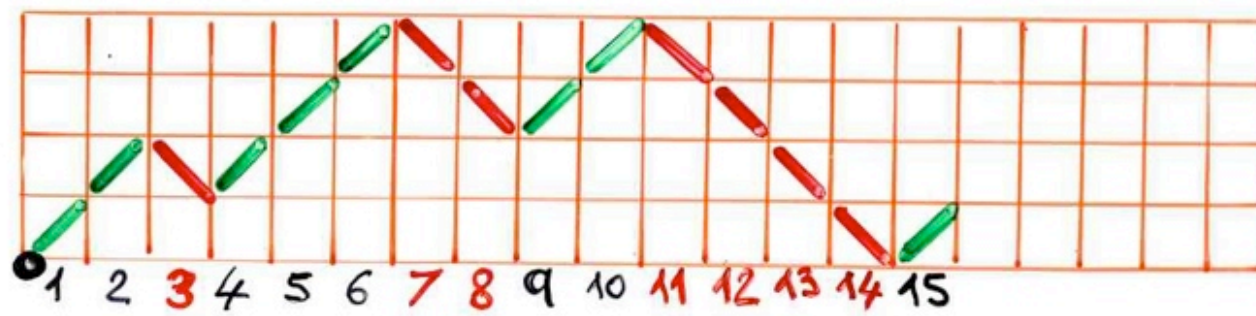
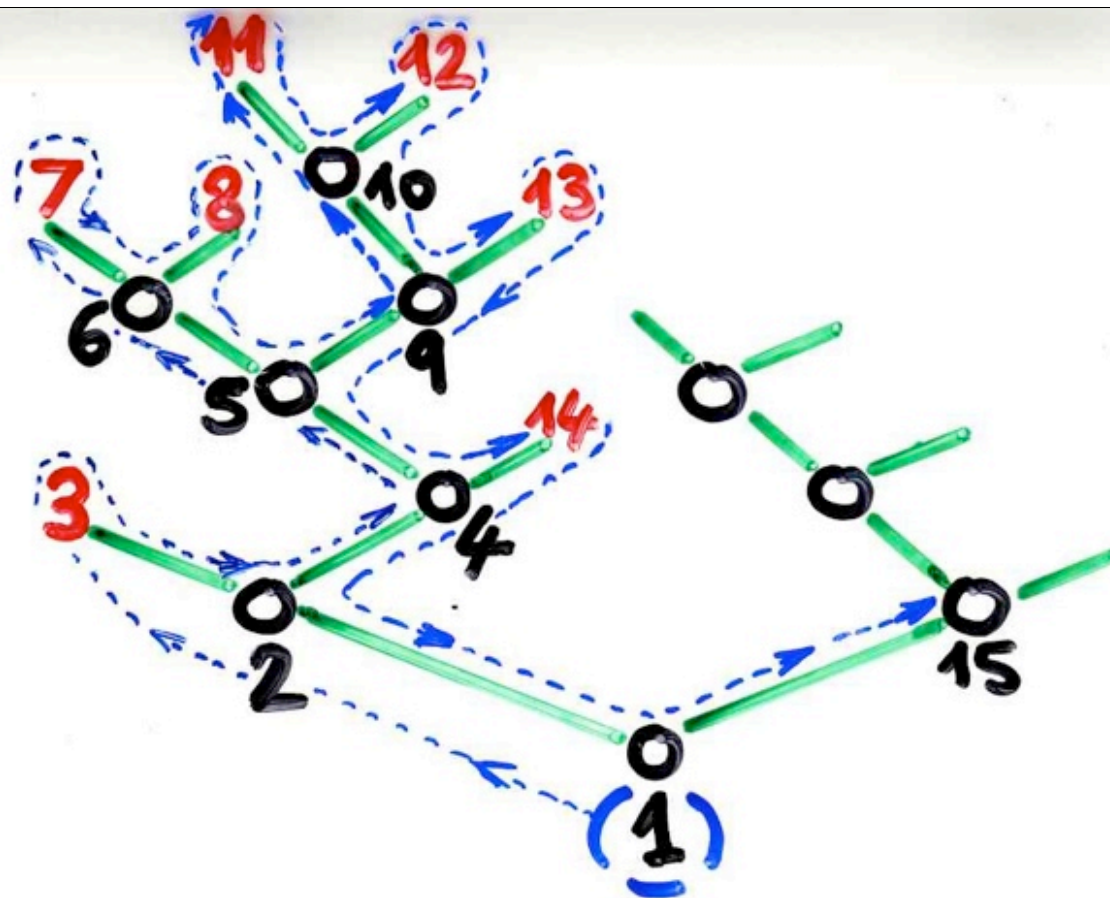


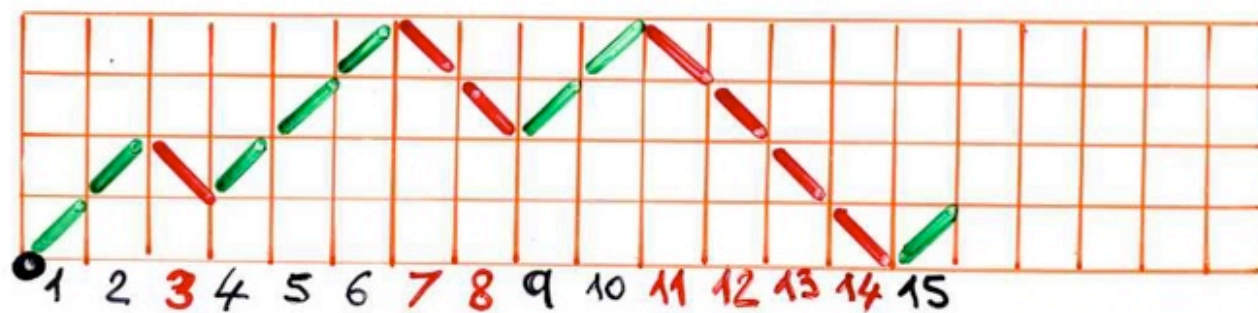
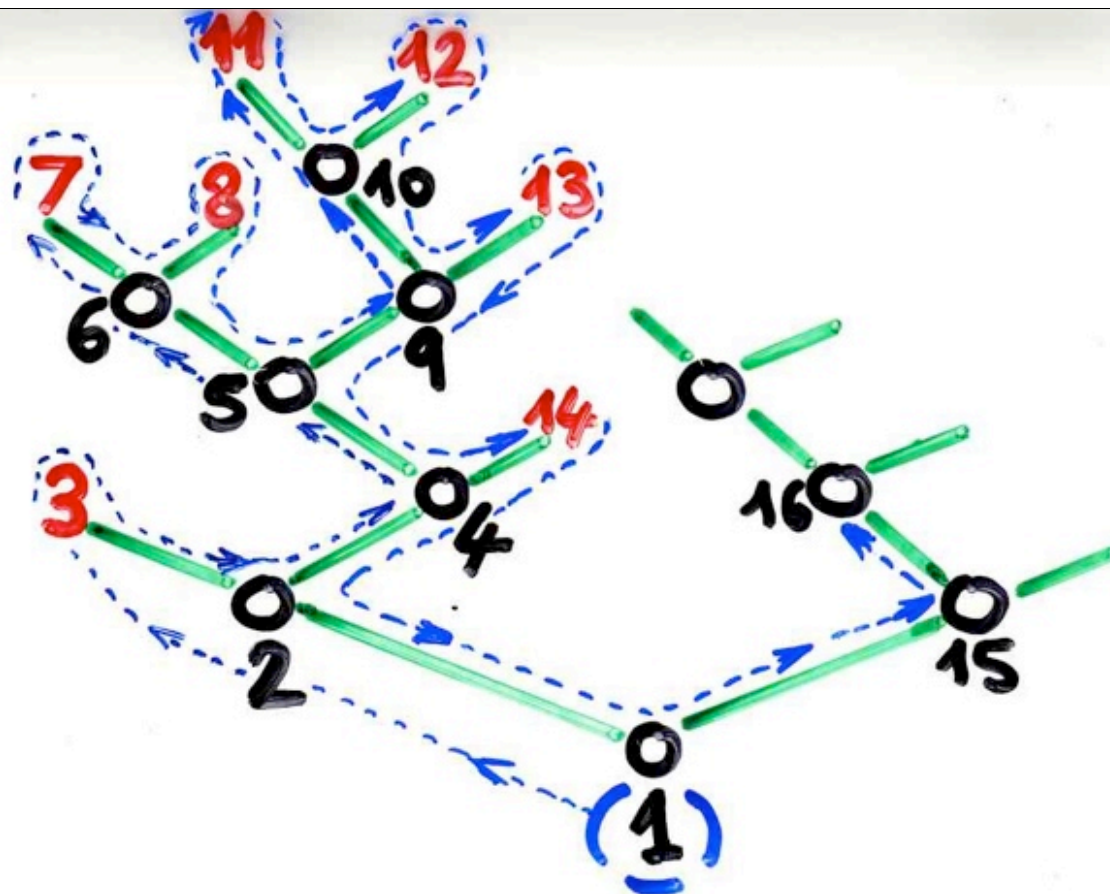


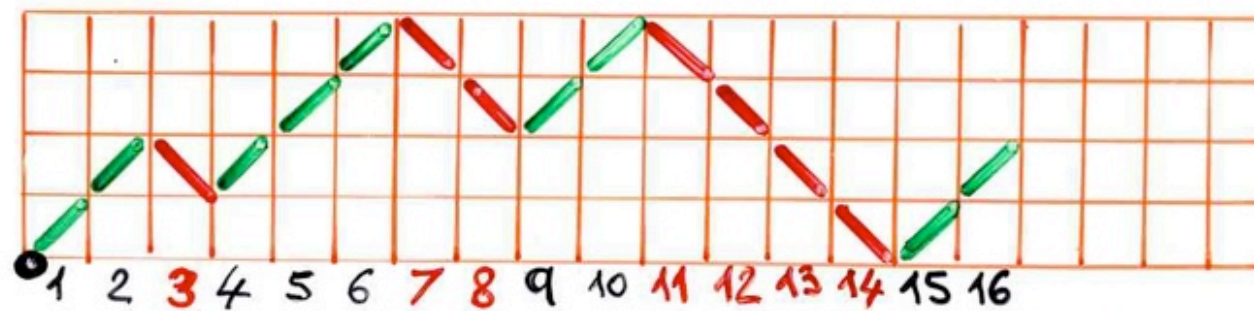


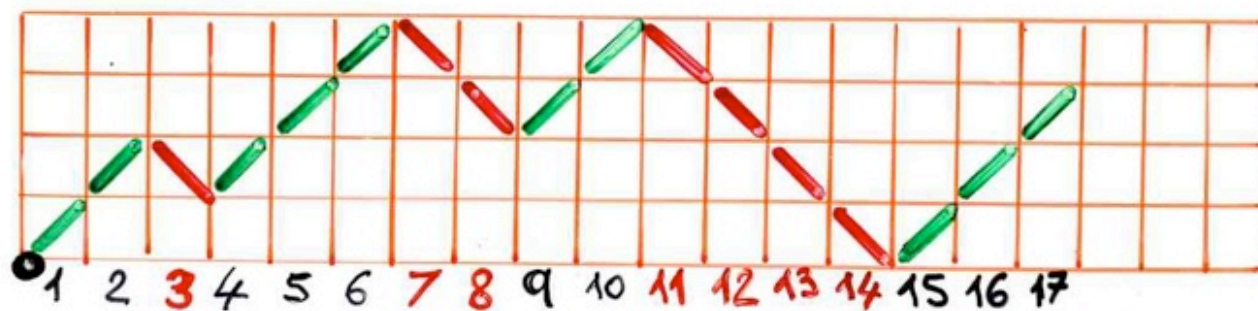
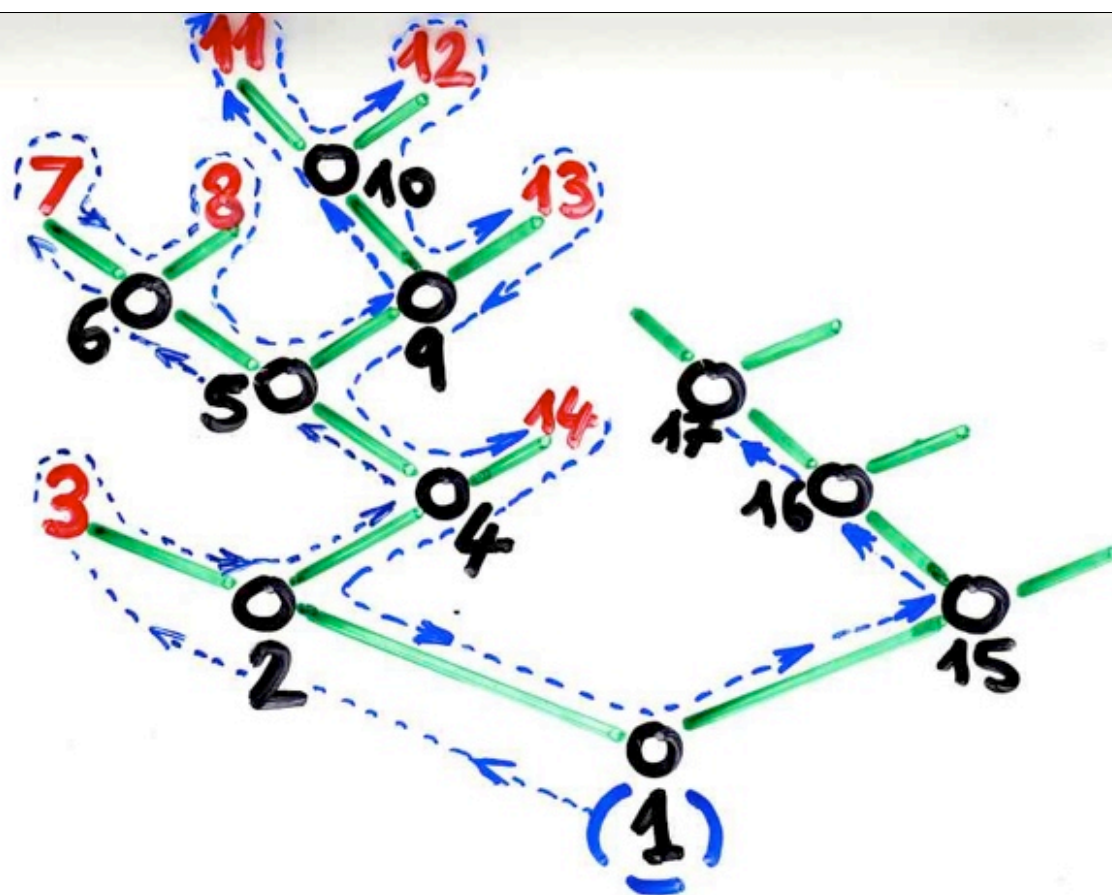


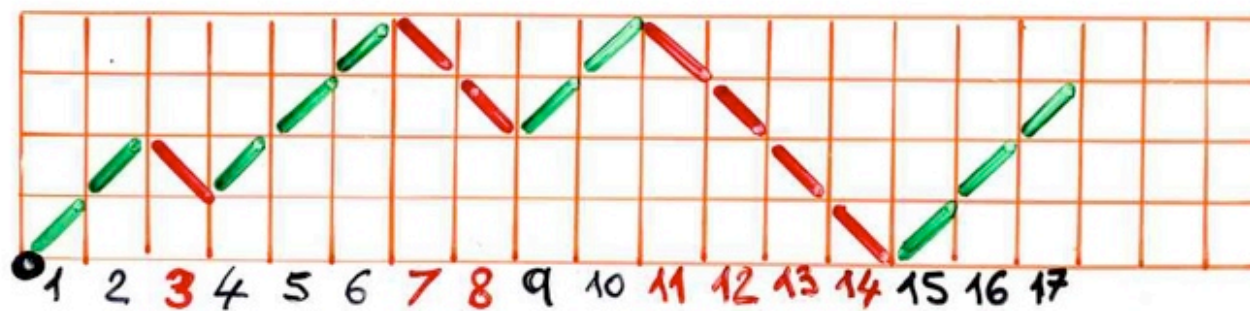
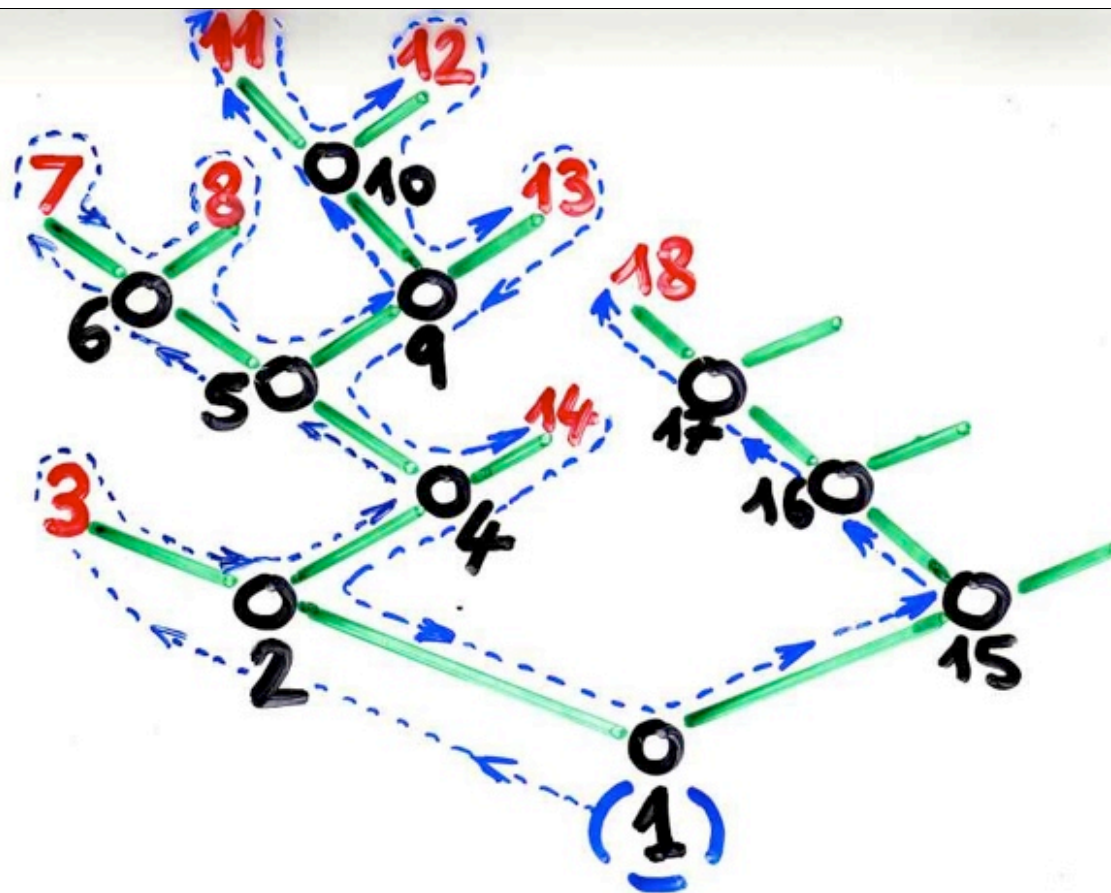


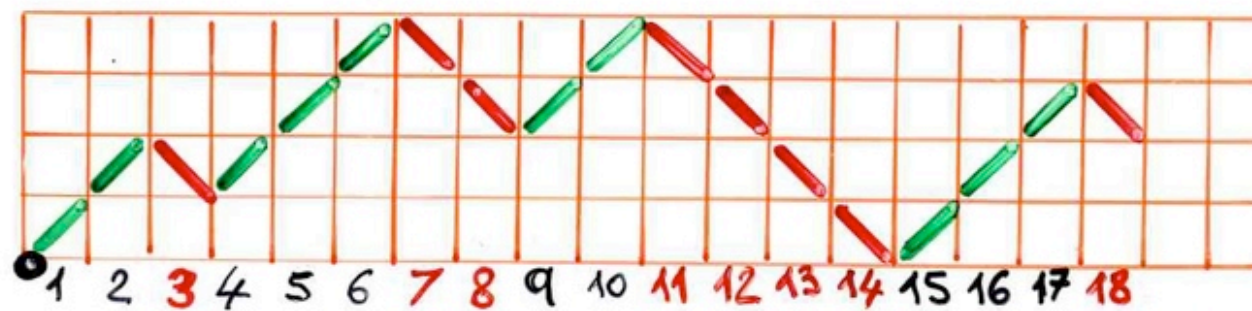
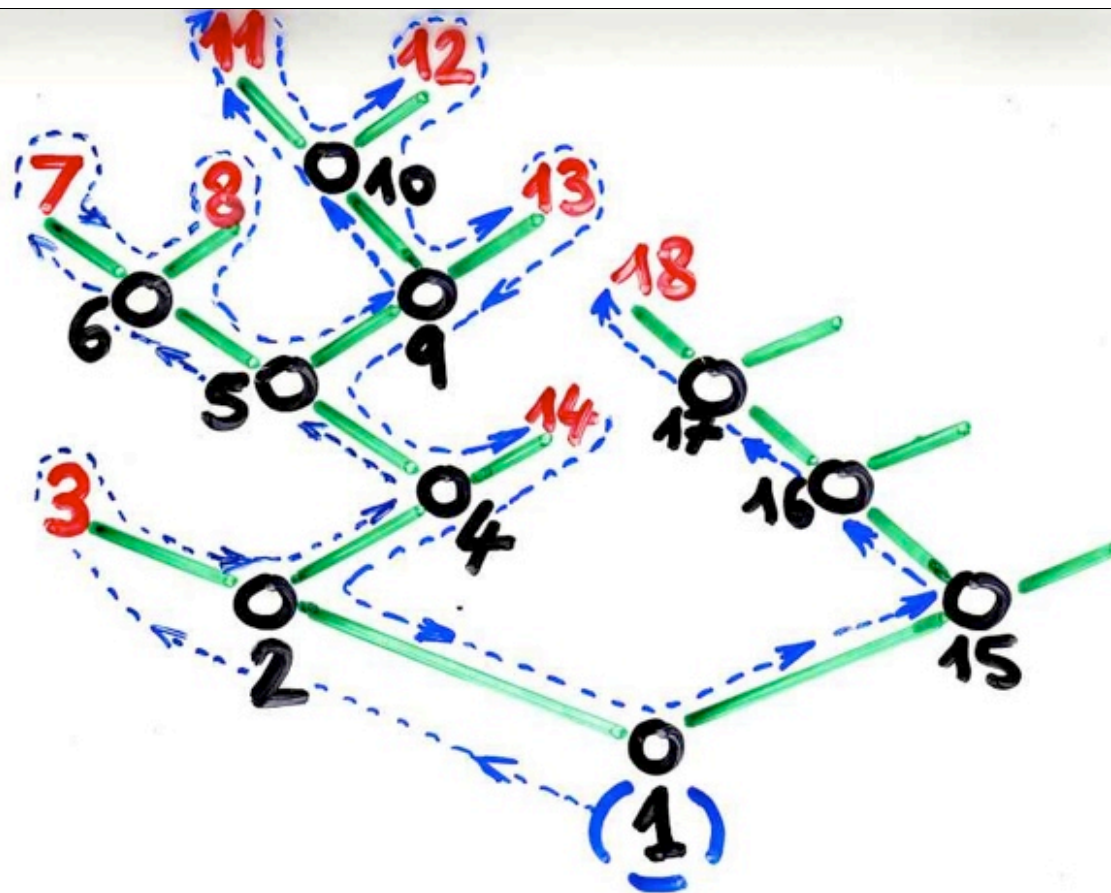


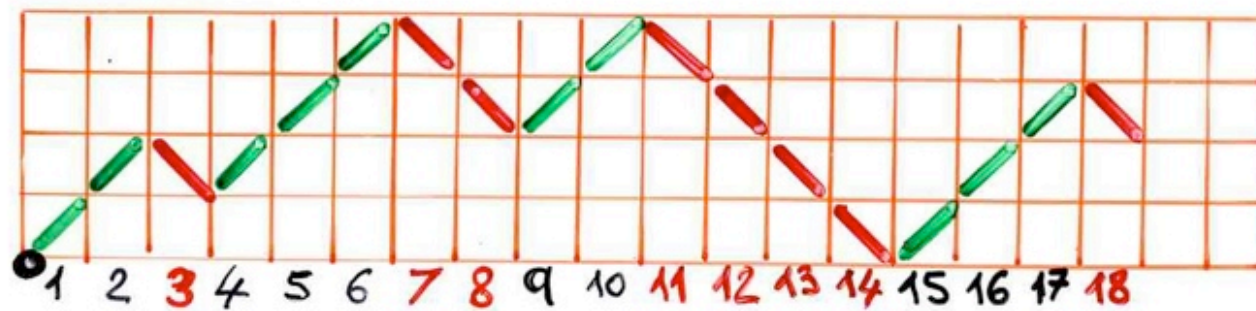
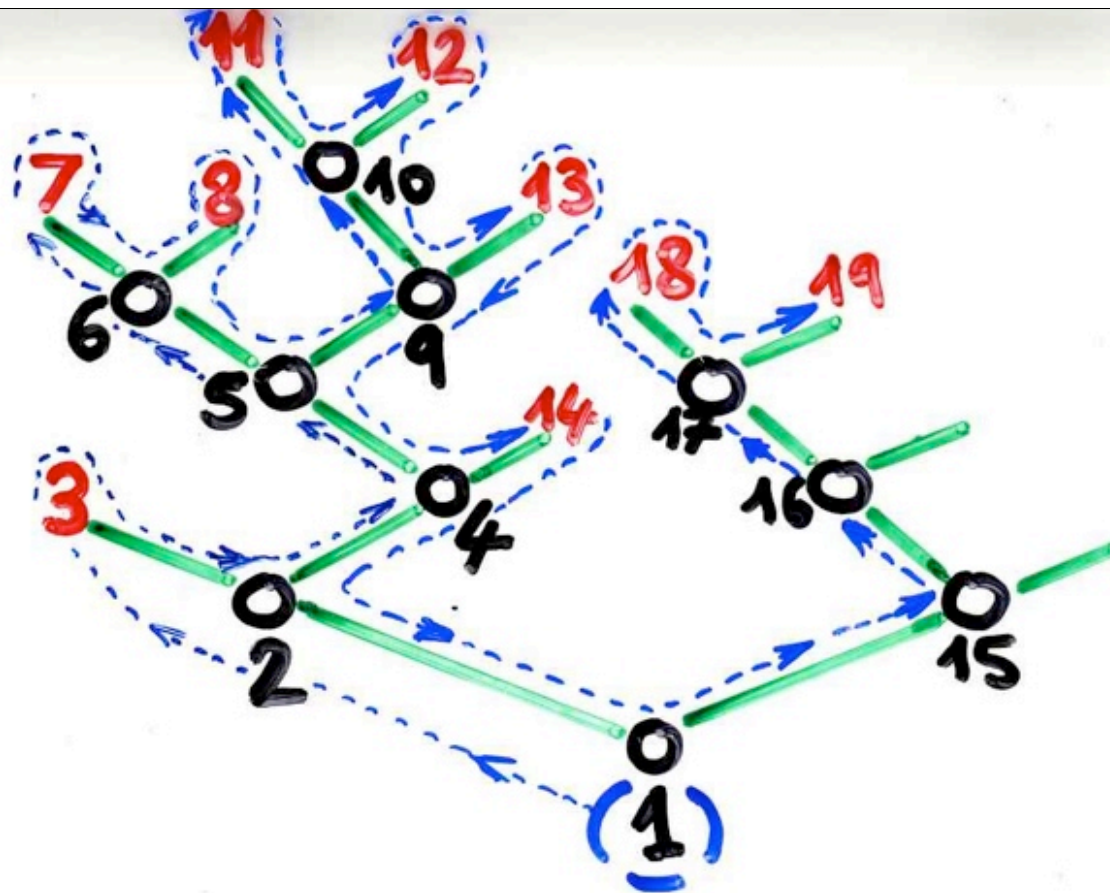


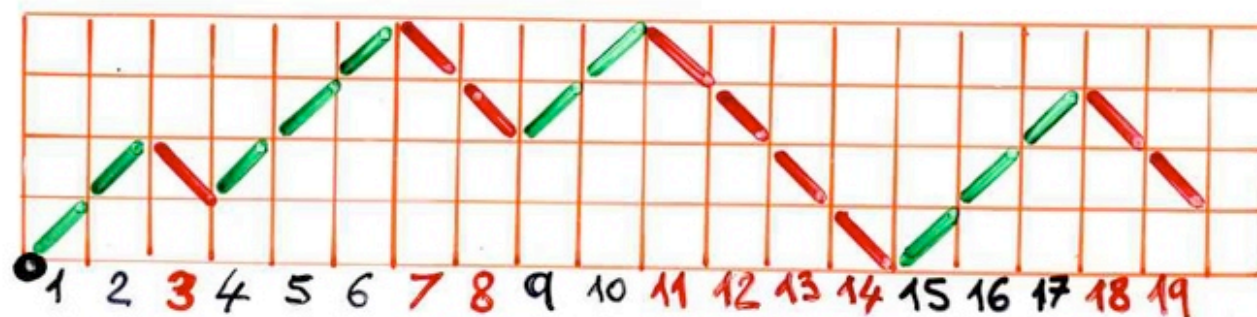
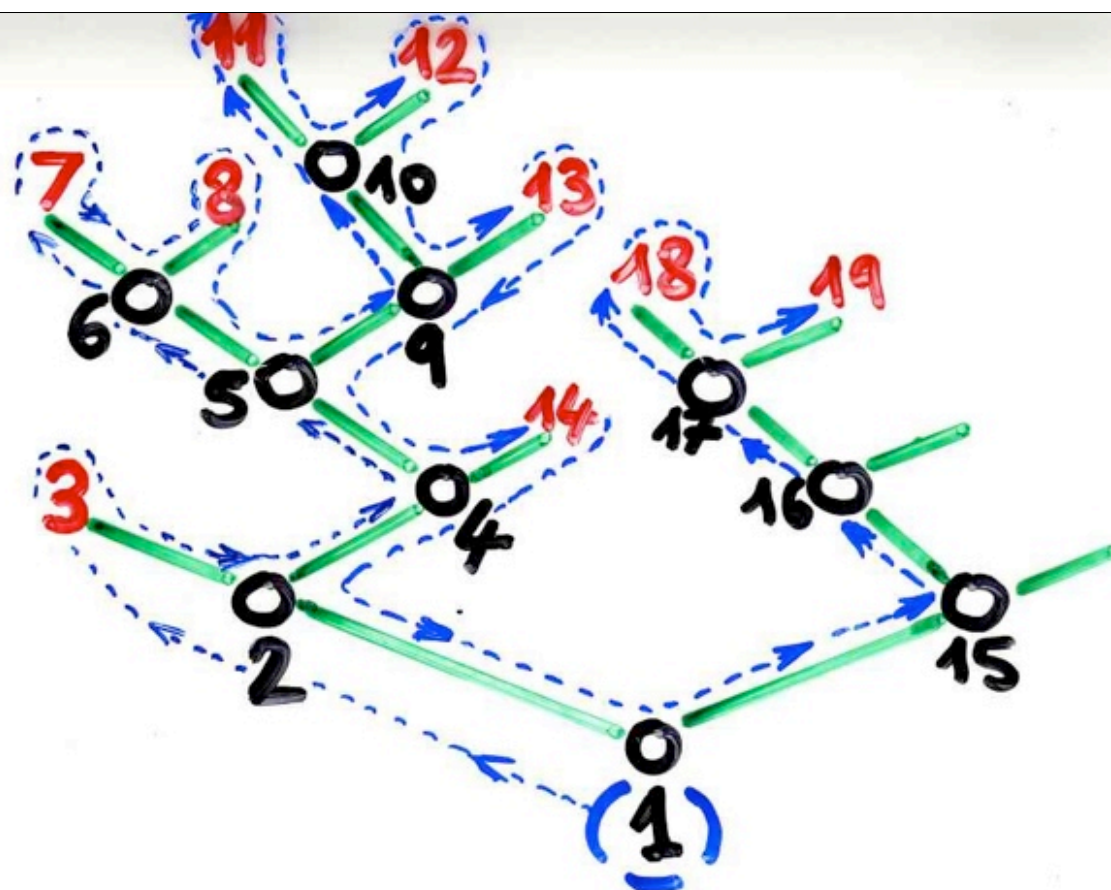


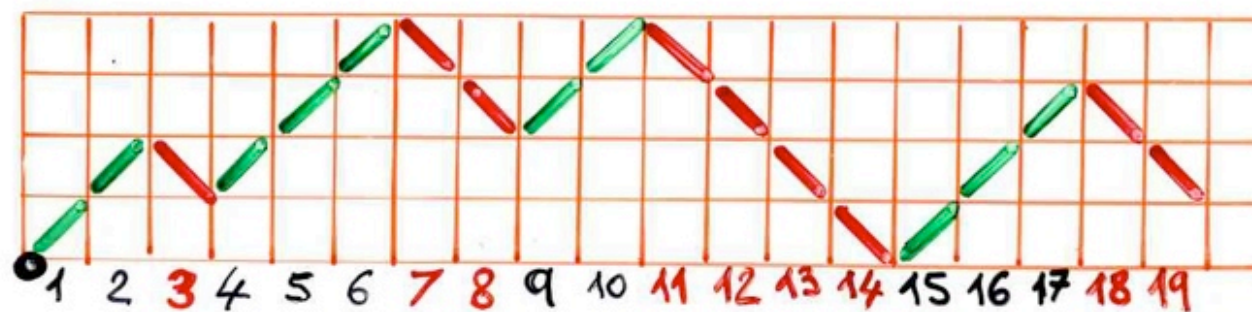
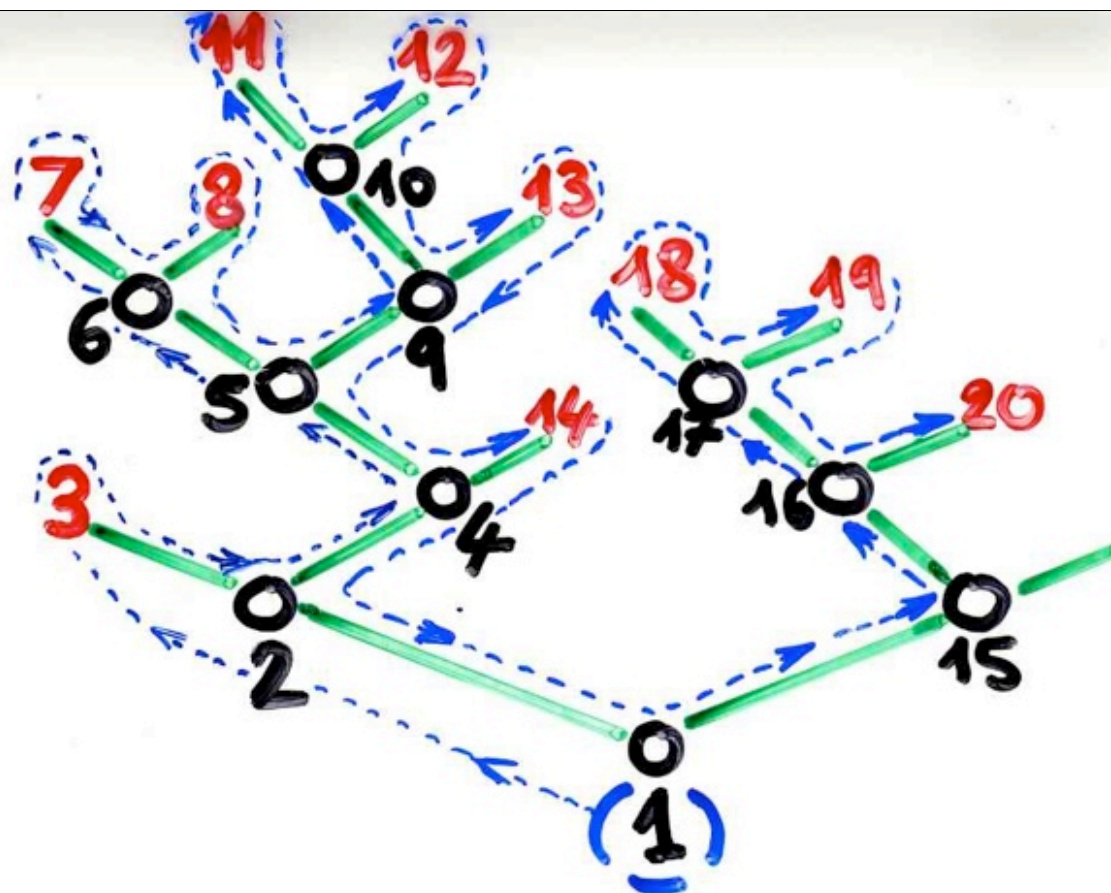


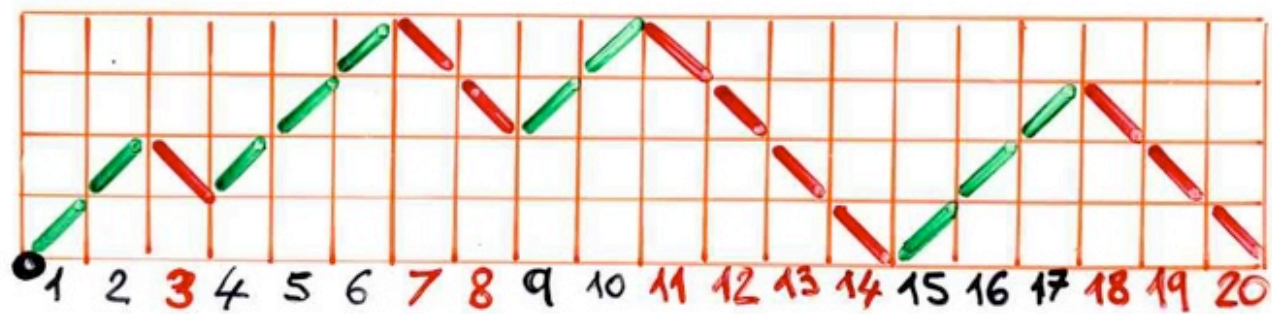
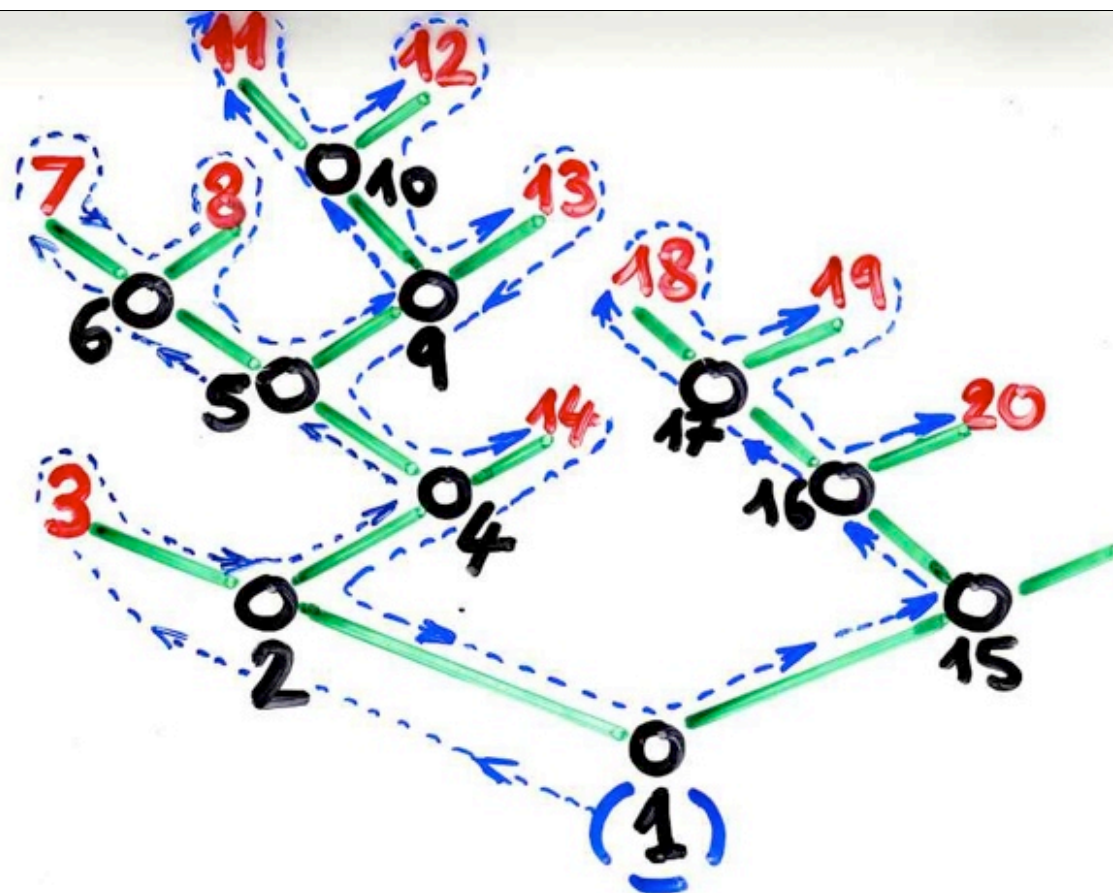


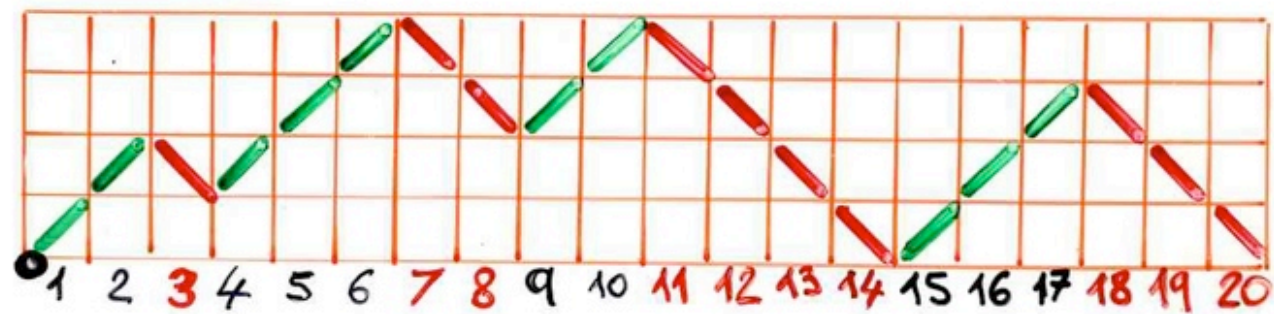
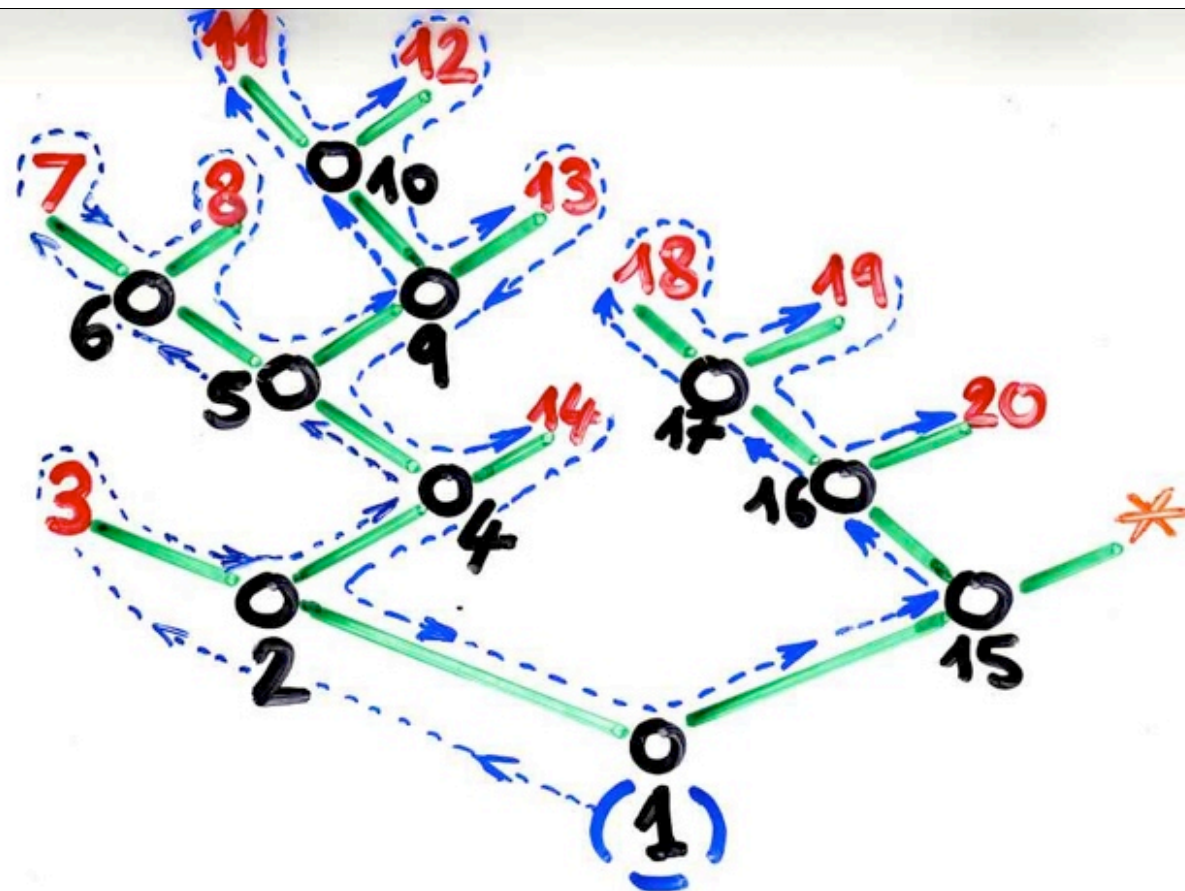












Donc on a enfin

$$A_{m,n} = \pm \xi^{l-m} \{ A_{0,n} \cdot \gamma^l m + A_{0,n+1} \cdot m \gamma^{l-m-1} \xi + A_{0,n+2} \cdot \frac{m \cdot m-1}{1 \cdot 2} \gamma^{l-m-2} \xi^2 + \text{etc.} + A_{0,n+m-1} \cdot m \gamma^l \xi^{m-1} + A_{0,n+m} \cdot \xi^m \}, \quad (3)$$

le signe supérieur ou inférieur ayant lieu suivant que m est pair ou impair. Ce résultat s'accorde avec celui que l'on peut déduire d'une solution différente du même exemple, donnée par LAPLACE dans les mémoires de Paris, année 1779, n.° XVII, page 267.

Si l'on fait n négatif dans la formule (1) ci-dessus, on trouve, en rejetant les termes et celles de leurs parties où les indices de n sont négatifs et ceux de n' négatifs ou positifs > 0 , que cette formule se réduit à la suivante :

$$A_{m,-n} = \pm \xi^l \{ A_{0,0} \gamma^m (\alpha^n \cdot \xi^{l-n-1}) - A_{0,1} \gamma^m (\alpha^{n+1} \cdot \xi^{l-n-2}) + A_{0,2} \gamma^m (\alpha^{n+2} \cdot \xi^{l-n-3}) - \text{etc.} \} \quad (4)$$

laquelle, à cause que $\alpha = 0$ et que sa seule dérivée n est ξ , devient

$$A_{m,-n} = \pm \xi^l \{ A_{0,0} \cdot \xi^n \gamma^{m-n} \cdot \xi^{l-n-1} - A_{0,1} \cdot \xi^{n+1} \gamma^{m-n-1} \cdot \xi^{l-n-2} + A_{0,2} \cdot \xi^{n+2} \gamma^{m-n-2} \cdot \xi^{l-n-3} - \text{etc.} \}. \quad (5)$$

D'où il suit que $A_{m,-n}$ n'est zéro qu'autant que m est $< n$. Ainsi la série récurrente s'étend, sous forme de triangle, dans la quatrième région.

EXEMPLE VI.

246. Étant donné le commencement de la table suivante, où chaque terme est formé de la somme de celui qui le précède dans la même ligne horizontale et de celui qui le suit d'un rang dans la ligne horizontale immédiatement supérieure, avec la condition que chacun des termes de la première ligne horizontale soit égal à l'unité : on demande le terme général de cette table :

1	1	1	1	1	etc.
1	2	3	4	5	etc.
2	5	9	14	20	etc.
5	14	28	48	75	etc.
14	42	90	165	275	etc.
etc.	etc.	etc.	etc.	etc.	etc.

L'équation de relation est $A_{m,n} = A_{m-1,n} + A_{m+1,n-1}$; j'y mets $m-1$ au lieu de m , et elle devient

DU CALCUL
DES
DÉRIVATIONS;

PAR L. F. A. ARBOGAST,

De l'Institut national de France , Professeur de
Mathématiques à Strasbourg.

A STRASBOURG,
DE L'IMPRIMERIE DE LEVRAULT, FRÈRES.

AN VIII (1800).

séries génératrices

CHAPITRE XVI.

De la partition des Nombres.

297. Proposons-nous cette expression :

$$(1 + x^{\alpha} z) (1 + x^{\epsilon} z) (1 + x^{\gamma} z) (1 + x^{\delta} z) (1 + x^{\iota} z) \&c.$$

& cherchons la forme qu'elle prendra, étant développée par la multiplication. Supposons qu'elle devienne

$$1 + Pz + Qz^2 + Rz^3 + Sz^4 + \&c.$$

il est évident que P sera la somme des puissances

$x^{\alpha} + x^{\epsilon} + x^{\gamma} + x^{\delta} + x^{\iota} + \&c.$ Ensuite Q sera la somme des produits de deux puissances différentes, ou un assemblage de plusieurs puissances de x , dont les exposants sont les sommes de deux termes différents de cette série

$$\alpha, \epsilon, \gamma, \delta, \iota, \xi, \eta, \&c.$$

301. Mais, si vous supposez $x = 1$, & que vous fassiez une somme des puissances semblables de x , ou, ce qui revient au même, si vous développez cette expression infinie

$$(1+x)(1+x^2)(1+x^3)(1+x^4)(1+x^5)(1+x^6) \&c.$$

vous aurez la suite

$$1+x+x^2+2x^3+2x^4+3x^5+4x^6+5x^7+6x^8+\&c.$$

dans laquelle chaque coefficient indique de combien de manières différentes l'exposant de la puissance correspondante de x , peut résulter par addition des termes différents de la série, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, &c. Ainsi, il est visible qu'il y a six manières de former le nombre 8 par l'addition de différents nombres. Les voici :

$$8 = 8$$

$$8 = 5 + 3$$

$$8 = 7 + 1$$

$$8 = 5 + 2 + 1$$

$$8 = 6 + 2$$

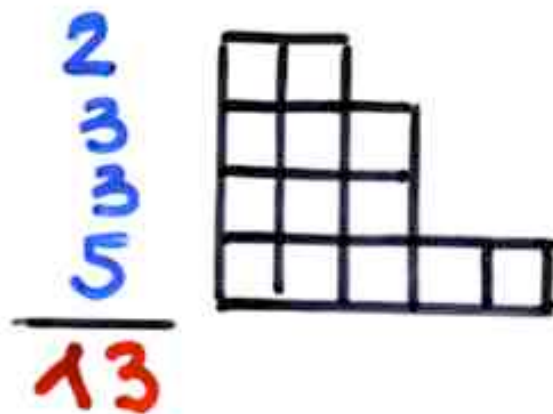
$$8 = 4 + 3 + 1$$

Partition de l'entier n

décomposition $n = \lambda_1 + \dots + \lambda_k$ λ_i parts

$$\lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_k \geq 1$$

exemple : $13 = 5 + 3 + 3 + 2$



a_n = nombre de partitions de n
en parts toutes distinctes

$$\sum_{n \geq 0} a_n q^n = (1+q)(1+q^2) \cdots (1+q^k) \cdots$$
$$\prod_{i \geq 1} (1+q^i)$$

p_n = nombre de partitions de n

$$\sum_{n \geq 0} p_n q^n = \prod_{i \geq 1} \frac{1}{(1 - q^i)}$$

$$\frac{1}{1 - q^k} = 1 + q^k + q^{2k} + q^{3k} + \dots$$

47 (

EVOLVTIO
PRODUCTI INFINITI

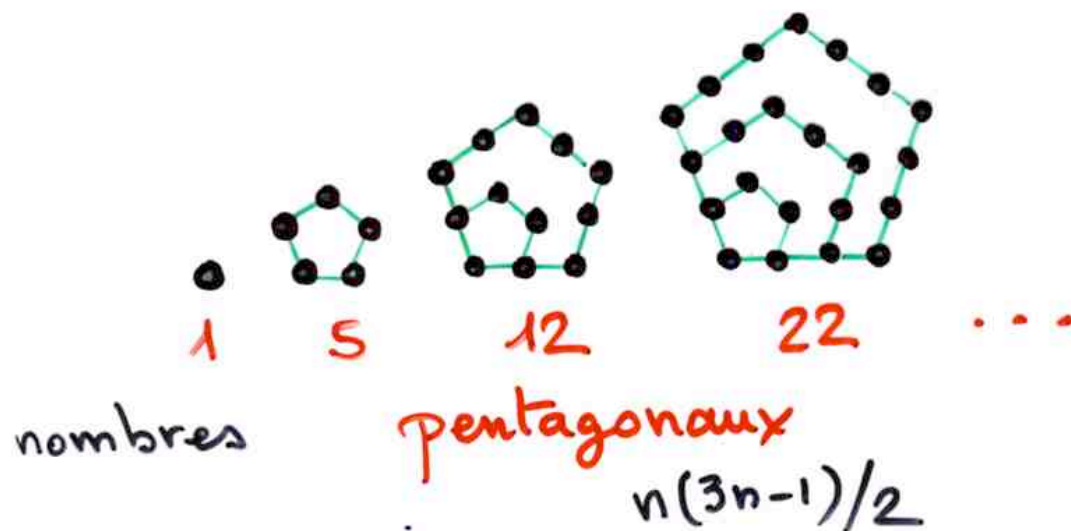
$(1-x)(1-x^2)(1-x^3)(1-x^4)(1-x^5)(1-x^6)$
IN SERIEM SIMPLICEM.

Auctore

L. E V L E R O.

$$\prod_{i \geq 1} (1 - q^i) = 1 - q - q^2 + q^5 + q^7 - q^{12} - q^{15} + \dots$$

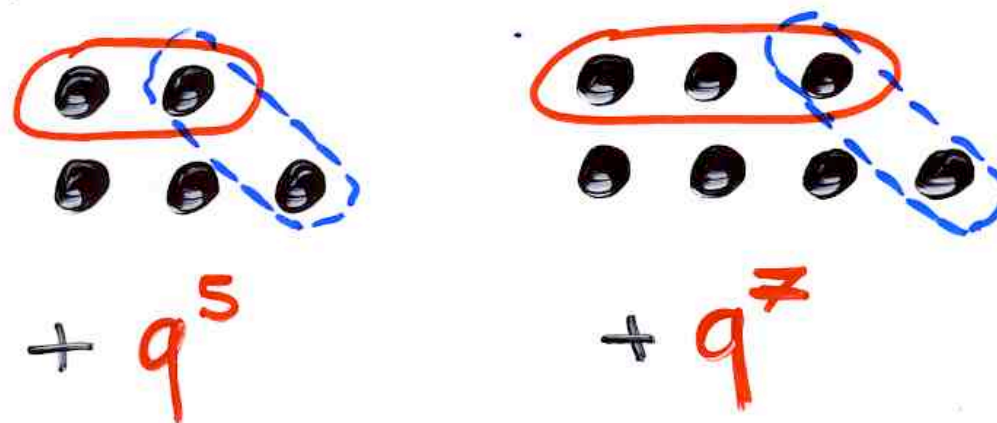
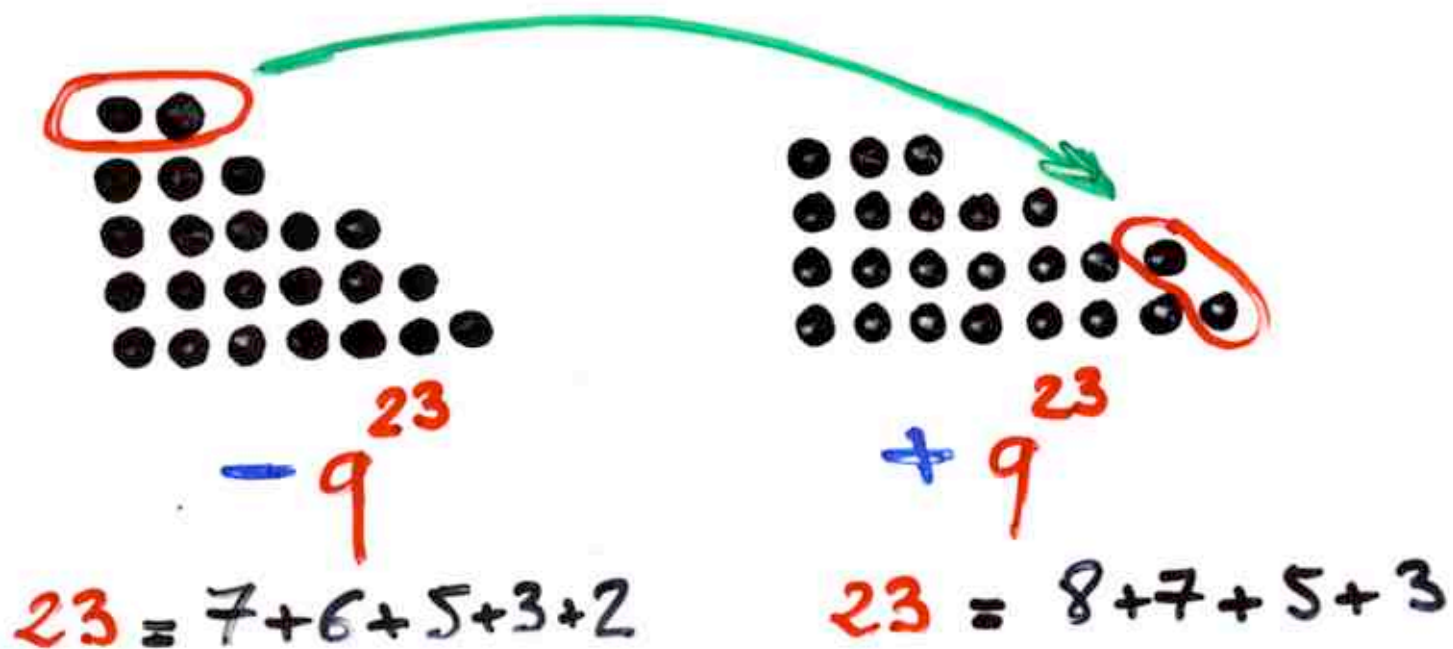
$$= \sum_{n \geq 1} (-1)^n \left(q^{\frac{n(3n-1)}{2}} + q^{\frac{n(3n+1)}{2}} \right)$$



coefficient de q^n

= (nombre de partitions de n
en un nombre pair de
parts distinctes)

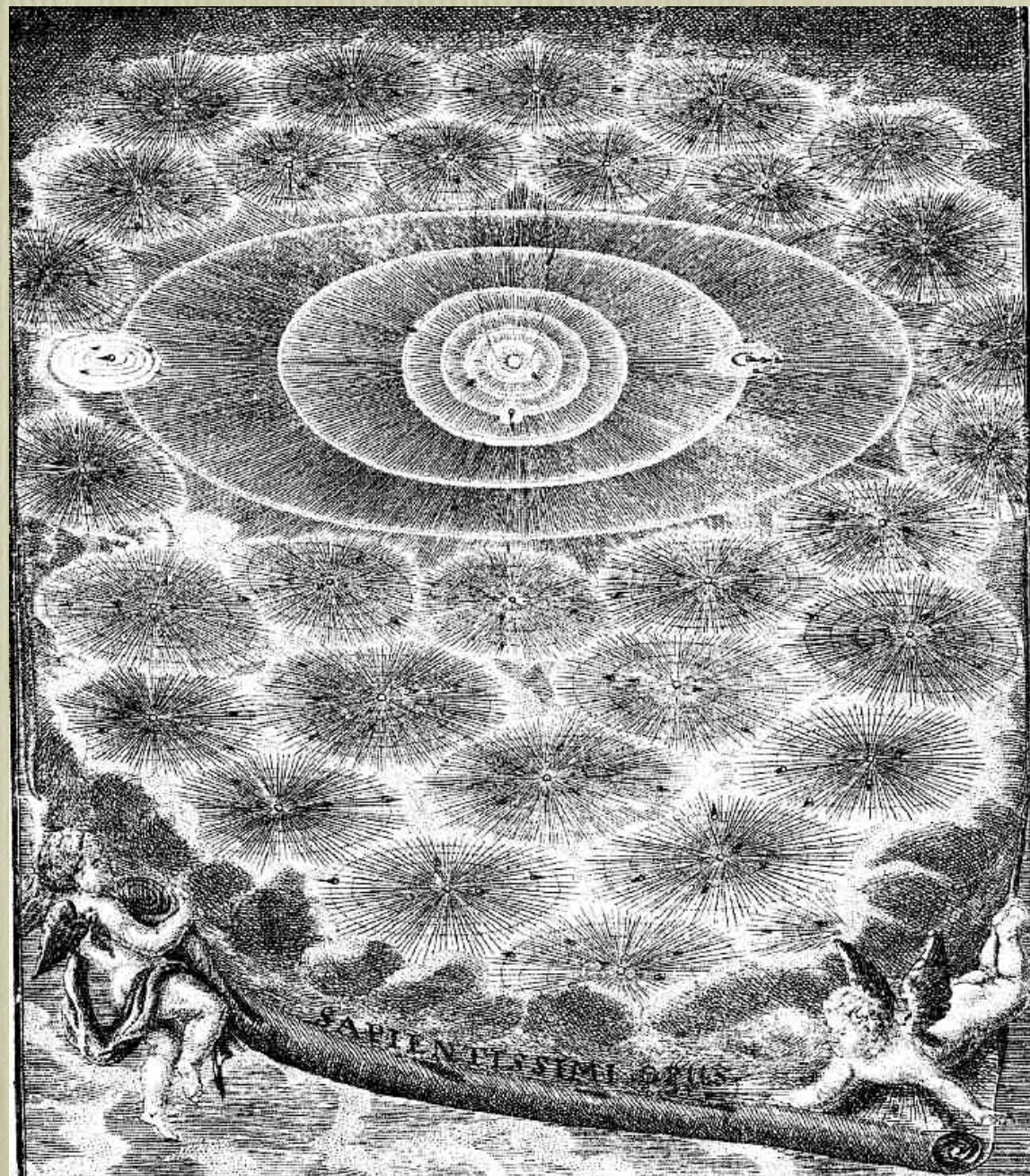
- (nombre de partitions de n
en un nombre impair de
parts distinctes)



Académie royale de Paris

prix de l'Académie

astronomie



le passage du soleil devant Vénus

le retour de la comète de Halley

perturbation de Saturne et Jupiter

précession des équinoxes

théorie de la lune

Euler, Clairaut, D'Alembert



Issac Newton
1643 - 1727

$$\frac{1}{r^2} + \varepsilon$$

?

$$\varepsilon \doteq \frac{1}{r^4}$$

?

Introductio in analysin infinitorum

Institutiones calculi differentialis

Institutiones calculi integralis



Série génératrice exponentielle

erit:

$\alpha = 1$

$\beta = 1$

$\gamma = 5$

$\delta = 61$

$\varepsilon = 1385$

$\zeta = 50521$

$\eta = 2702765$

$\theta = 199360981$

$\iota = 19391512145$

$\kappa = 2404879661671$

&c.

ex hisque valoribus obtinebitur:

$$\sec x = x + \frac{\beta}{1 \cdot 2} x^2 + \frac{\gamma}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} x^4 + \frac{\delta}{1 \cdot 2 \dots 6} x^6 + \frac{\varepsilon}{1 \cdot 2 \dots 8} x^8 + \&c.$$

fonction

 $f(x)$

erit hanc feriem ab illa subtrahendo :

$$\operatorname{tg} x = \frac{2^2(2^2-1)A x}{1.2} + \frac{2^4(2^4-1)B x^3}{1.2.3.4} + \frac{2^6(2^6-1)C x^5}{1.2...6} + \frac{2^8(2^8-1)D x^7}{1.2...8} + \&c.$$

$$\cot x = \frac{1}{x} - \frac{2^2 A x}{1.2} - \frac{2^4 B x^3}{1.2.3.4} - \frac{2^6 C x^5}{1.2.3...6} - \frac{2^8 D x^7}{1.2...8} - \&c.$$

CAPUT VIII.

431

Si ergo hic introducantur numeri A, B, C, &c. §. 182. inventi;

$$\text{erit: tang } x = \frac{2 A x}{1.2} + \frac{2^3 B x^3}{1.2.3.4} + \frac{2^5 C x^5}{1.2...6} + \frac{2^7 D x^7}{1.2...8} + \&c.$$

$$\tan(t) = \sum_{n \geq 0} T_{2n+1} \frac{t^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

$$\frac{1}{\cos(t)} = \sum_{n \geq 0} E_{2n} \frac{t^{2n}}{(2n)!}$$

E_{2n}
 nombres
 se'cant (d'Euler)

$\{1, 5, 61, 1385, \dots\}$

T_{2n+1}
 nombres
 tangents

$\{1, 2, 16, 272, 7936, \dots\}$

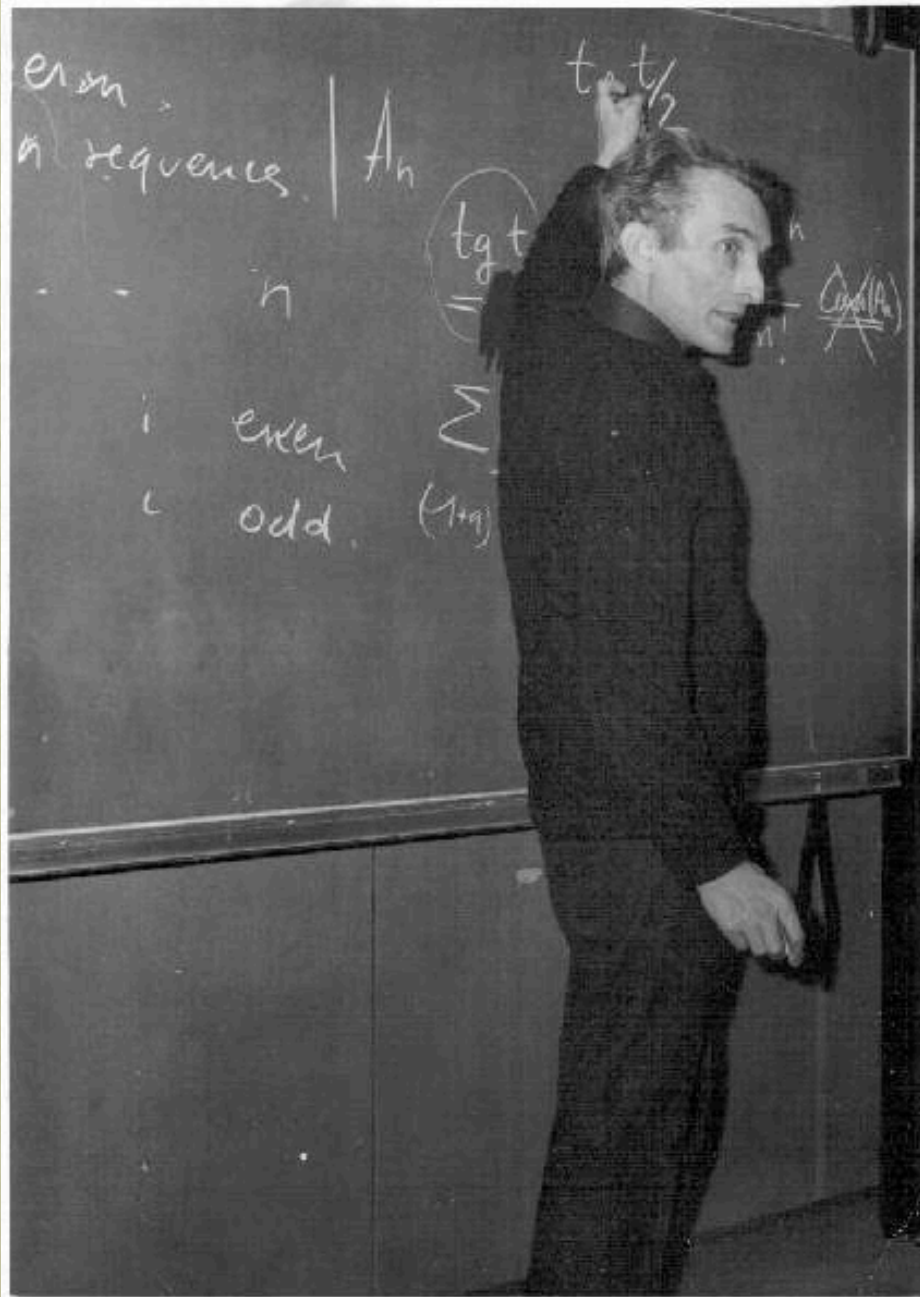
Permutations
alternantes

D. André (1880)

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 6 & 2 & 9 & 7 & 8 & 4 & 5 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

D. Foata
M.P. Schützenberger

"Théorie géométrique
des
polynômes Eulériens"
(1970)



notre “bon” Maître

Marcel Paul
Schützenberger

1920 - 1996

nombre de Bernoulli

$$B_{2n} \quad \frac{1}{6}, \frac{1}{30}, \frac{1}{42}, \frac{1}{30}, \frac{5}{66}, \frac{691}{2730}, \frac{7}{6}, \dots$$

398

C A P U T VII.

A = 2. 1. 3	U = $2(2^2 - 1)$	U.
B = 2. 3. 5	V = $2(2^4 - 1)$	V
C = 2. 7. 9	W = $2(2^6 - 1)$	W
D = 2. 15. 17	X = $2(2^8 - 1)$	X
E = 2. 31. 33	Y = $2(2^{10} - 1)$	Y
F = 2. 63. 65	Z = $2(2^{12} - 1)$	Z
G = 2. 127. 129	AA = $2(2^{14} - 1)$	AA
H = 2. 255. 257	AB = $2(2^{16} - 1)$	AB
	&c.	

Interprétation combinatoire

Hinc igitur calculo instituto reperietur :

A =	1
B =	1
C =	3
D =	17
E =	155
F =	2073
G =	38227
H =	929569
I =	28820619



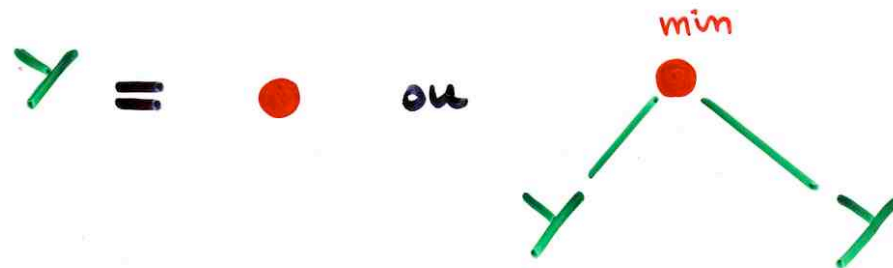
$$7. \frac{127.129}{3}.$$

&c.

Angelo Genocchi
1817 - 1889

$$y = t + \int_0^t y^2 dt$$

$$Y = T + \int_0^T Y^2(T) dT$$



"Dessiner" des calculs
Calculer des "figures"

théorie combinatoire
équations différentielles
calcul intégral

théorie du contrôle

Automatique non-linéaire

$$y' = y^2 + u(t)$$

Equations différentielles
en régime forcé

ius reperi inveniendi ex data fractione
 petitus, qui multo facilius et promptius negotium con-
 ficit: fit enim formulam generalius exprimendo:

$$A = 1 - 1x + 2x^2 - 6x^3 + 24x^4 - 120x^5 + 720x^6 - 5040x^7 + \text{etc.} = \frac{1}{1+B}.$$

D I V E R G E N T I B V S. 225

$$A = \frac{1}{1 + \frac{x}{1 + \frac{x}{1 + \frac{2x}{1 + \frac{2x}{1 + \frac{3x}{1 + \frac{3x}{1 + \frac{4x}{1 + \frac{4x}{1 + \frac{5x}{1 + \frac{5x}{1 + \frac{6x}{1 + \frac{6x}{1 + \frac{7x}{\text{etc.}}}}}}}}}}}}}}}}$$

§. 22. Quemadmodum autem huiusmodi fractio-

Théorie combinatoire
des fractions continues (analytiques)
et polynômes orthogonaux

P. Flajolet

X.V.

(1980, ---)

retour à Saint-Petersbourg 1766 - 1783



Catherine II
de Russie
(Catherine La Grande)



Frederick II de Prusse
(1712 - 1786)





Leonh. Euler.

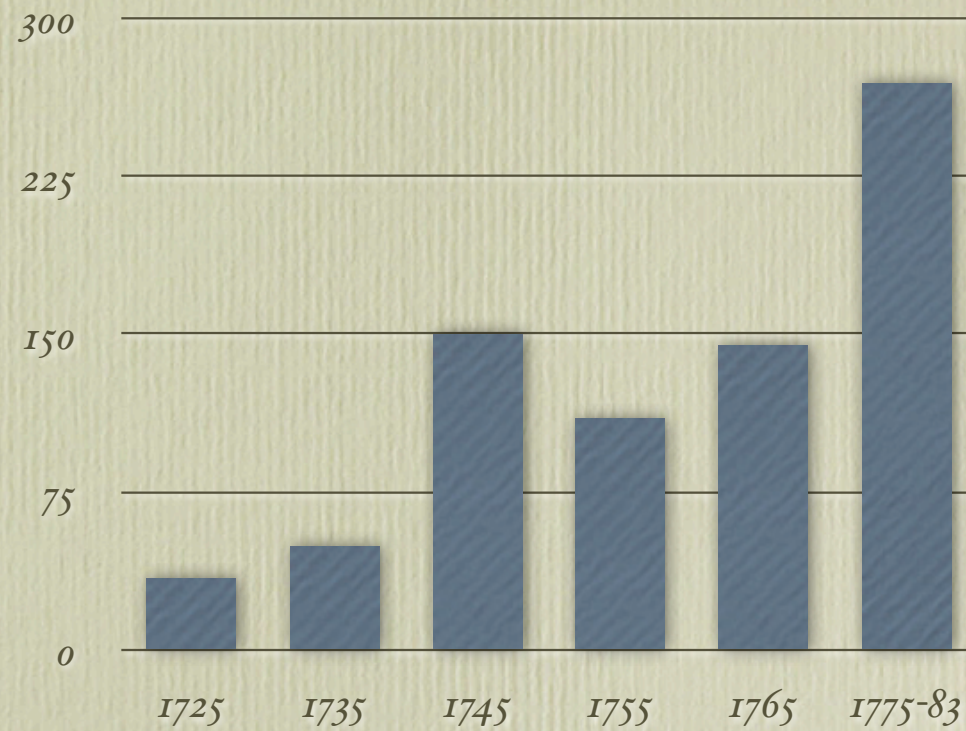
71 ans



Johann
Albrecht
Euler
(1734 - 1800)



Nikolai Fuss
1755 - 1826



Saint-
Pétersbourg

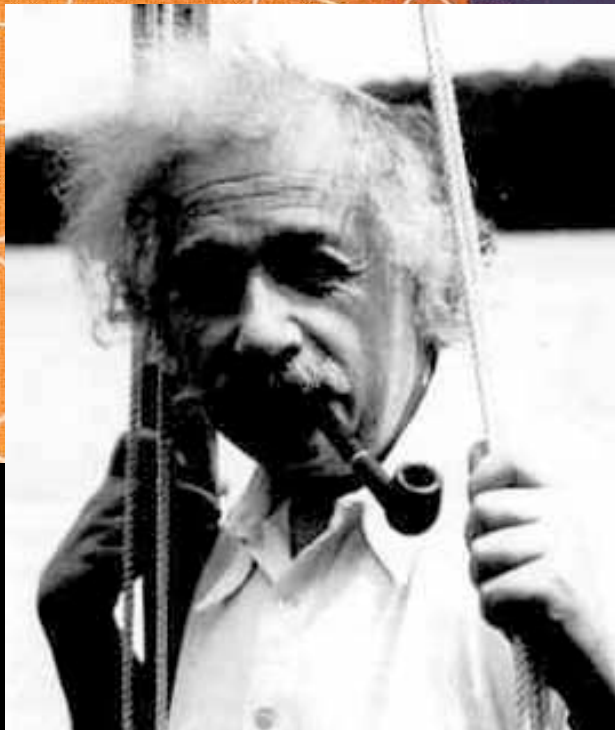
Berlin

Saint-
Pétersbourg

gravitation quantique

Relativité générale
Mécanique quantique

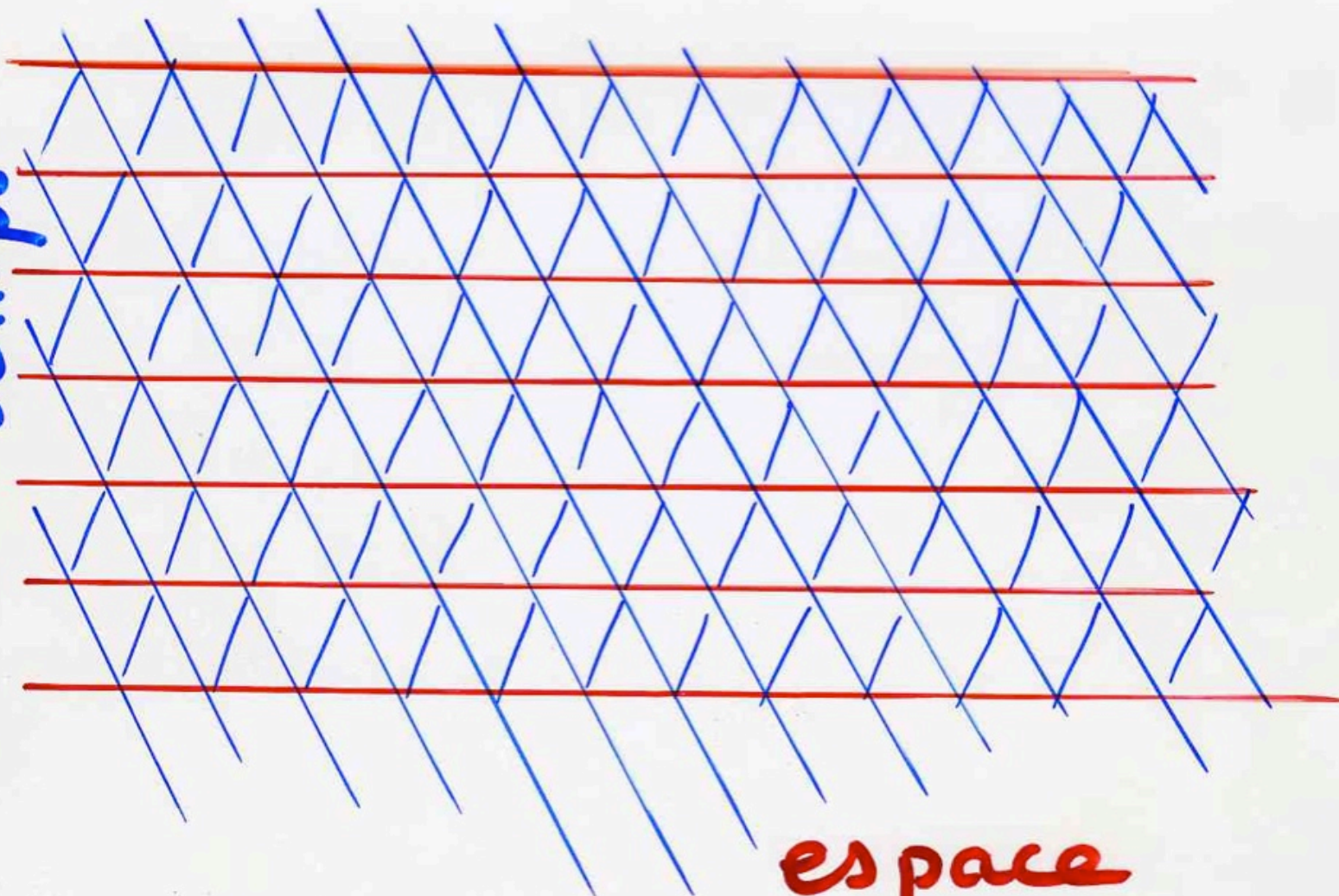
gravitation
quantique



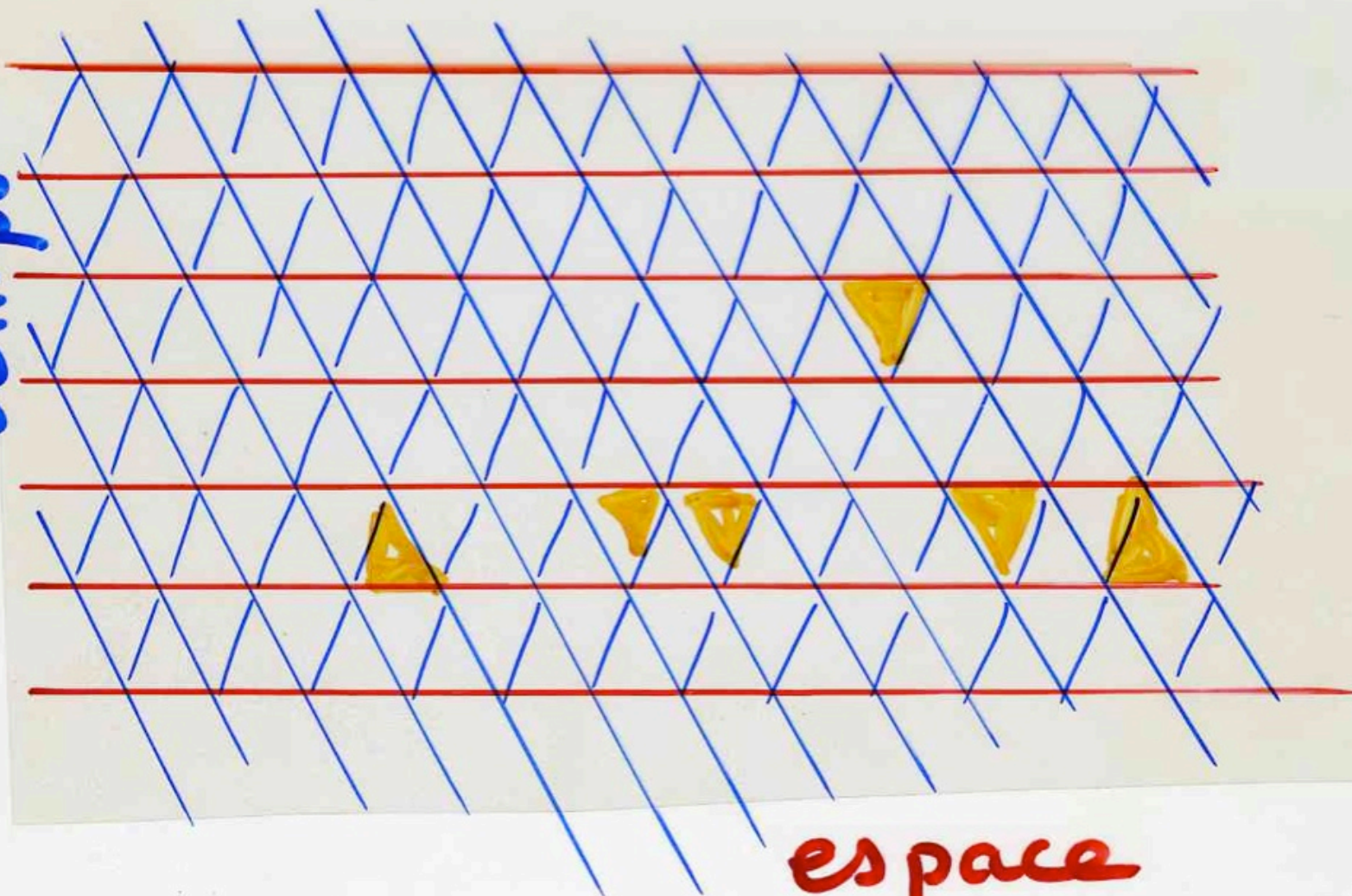
théorie des ? cordes

temps

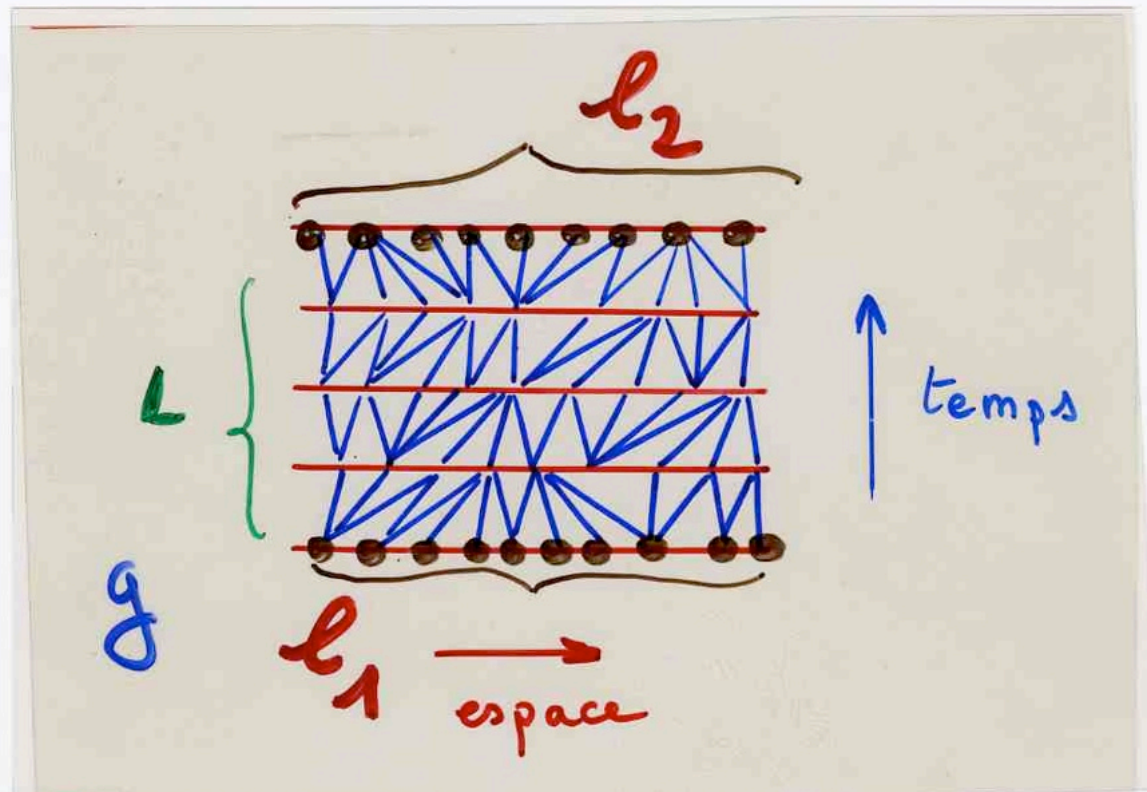
espace



temps



espace



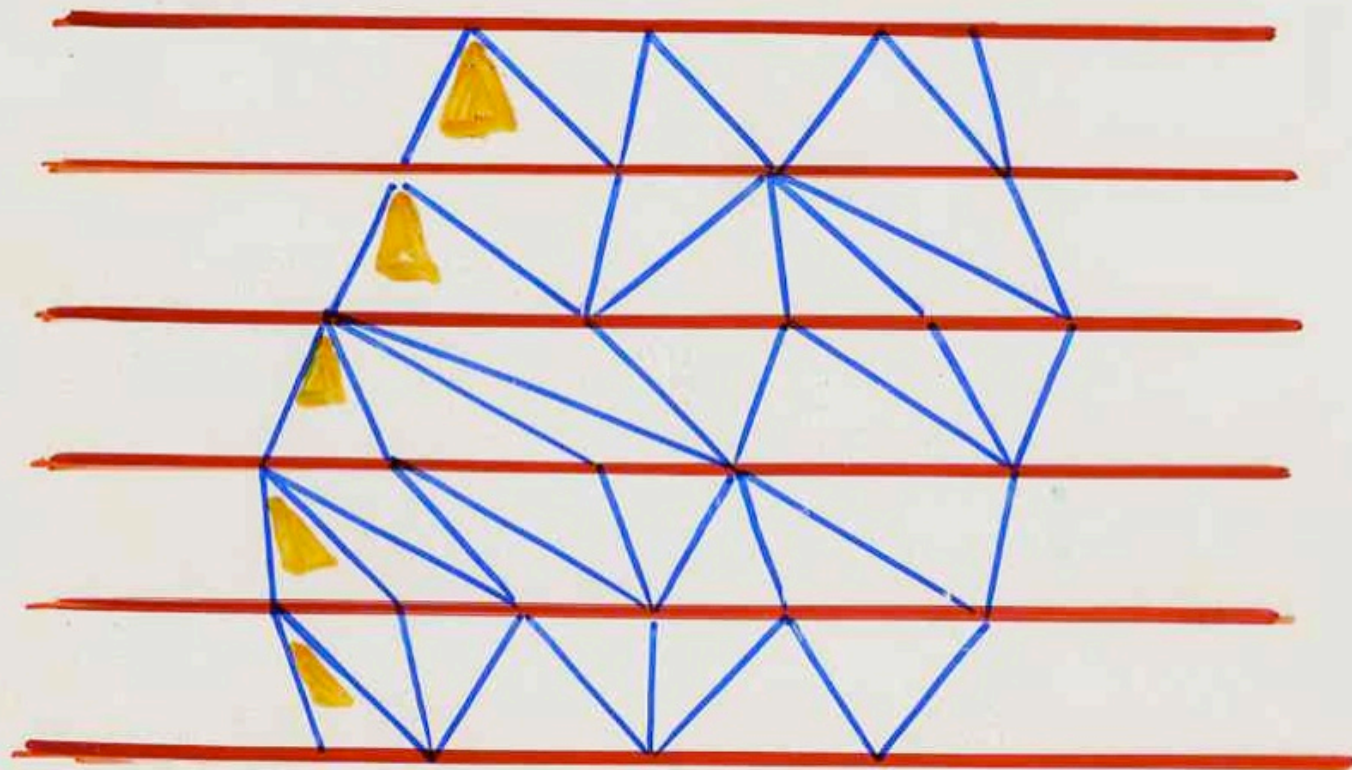
Path integral amplitude
for the propagation from
geometry l_1 to l_2

Catalan

number

!

$$C_n = \frac{1}{(n+1)} \binom{2n}{n}$$



métamorphose:

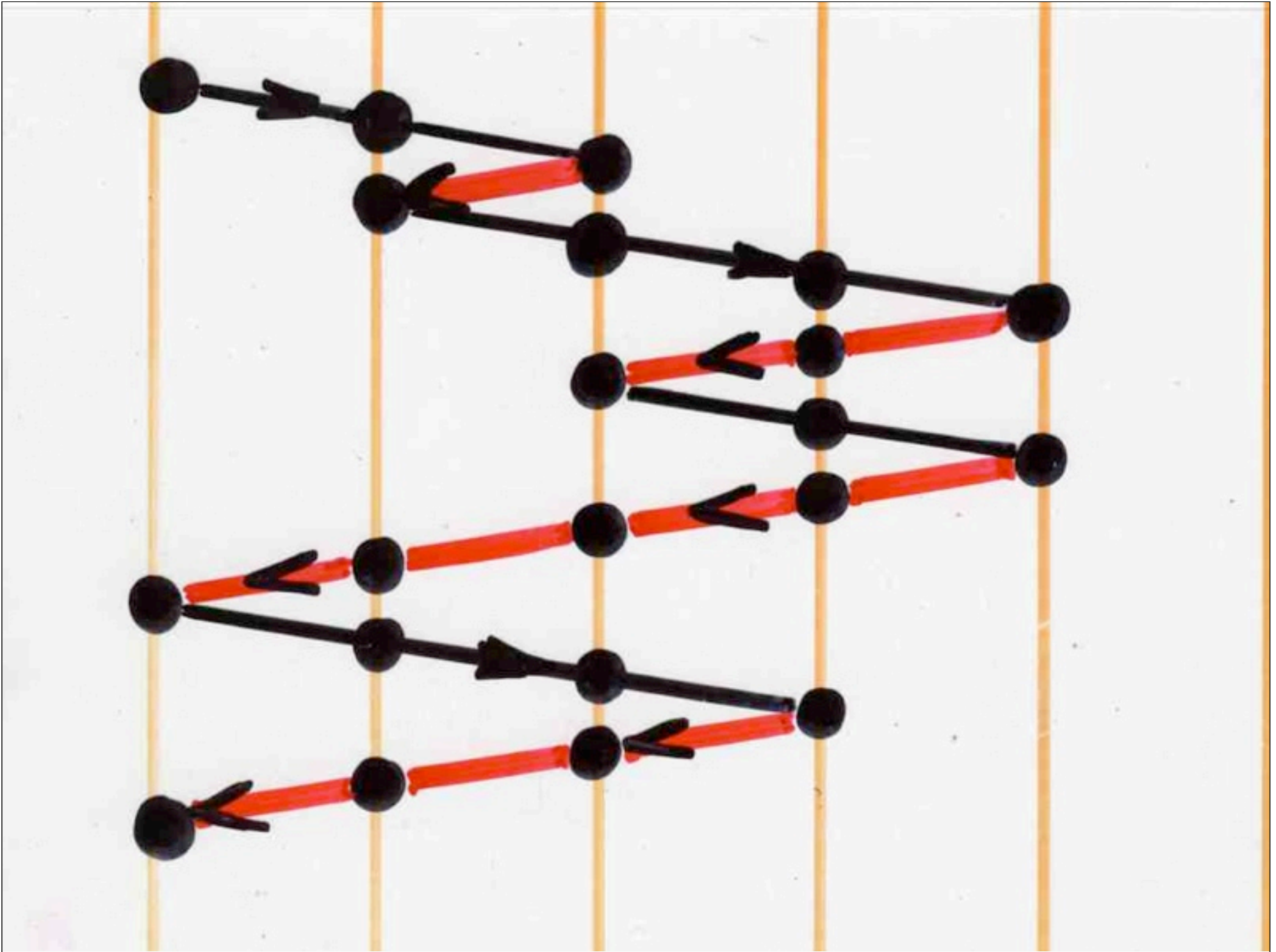
triangulation

arbres binaire

chemin de Dyck

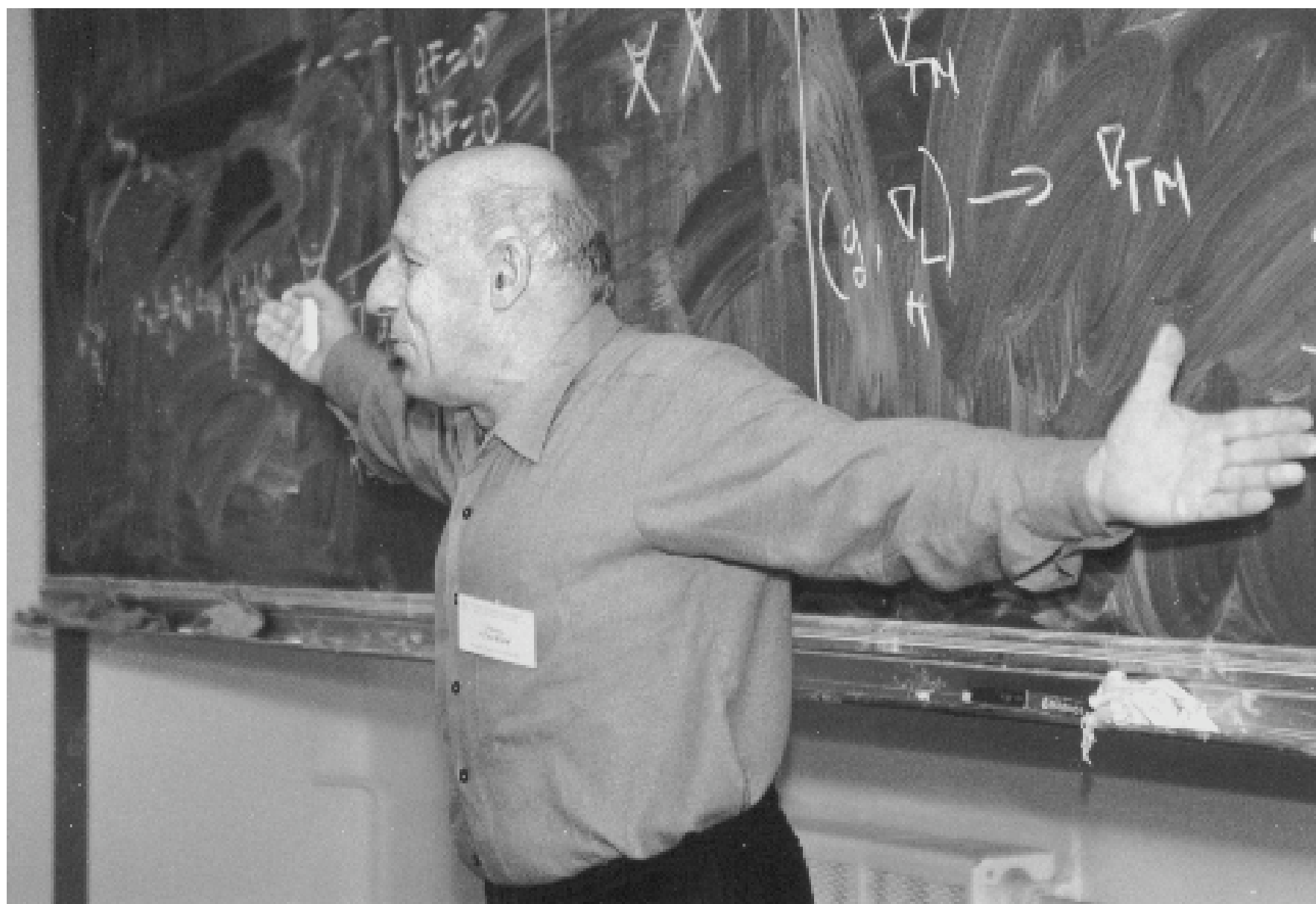
pyramide de dominos

triangulation Lorentzienne



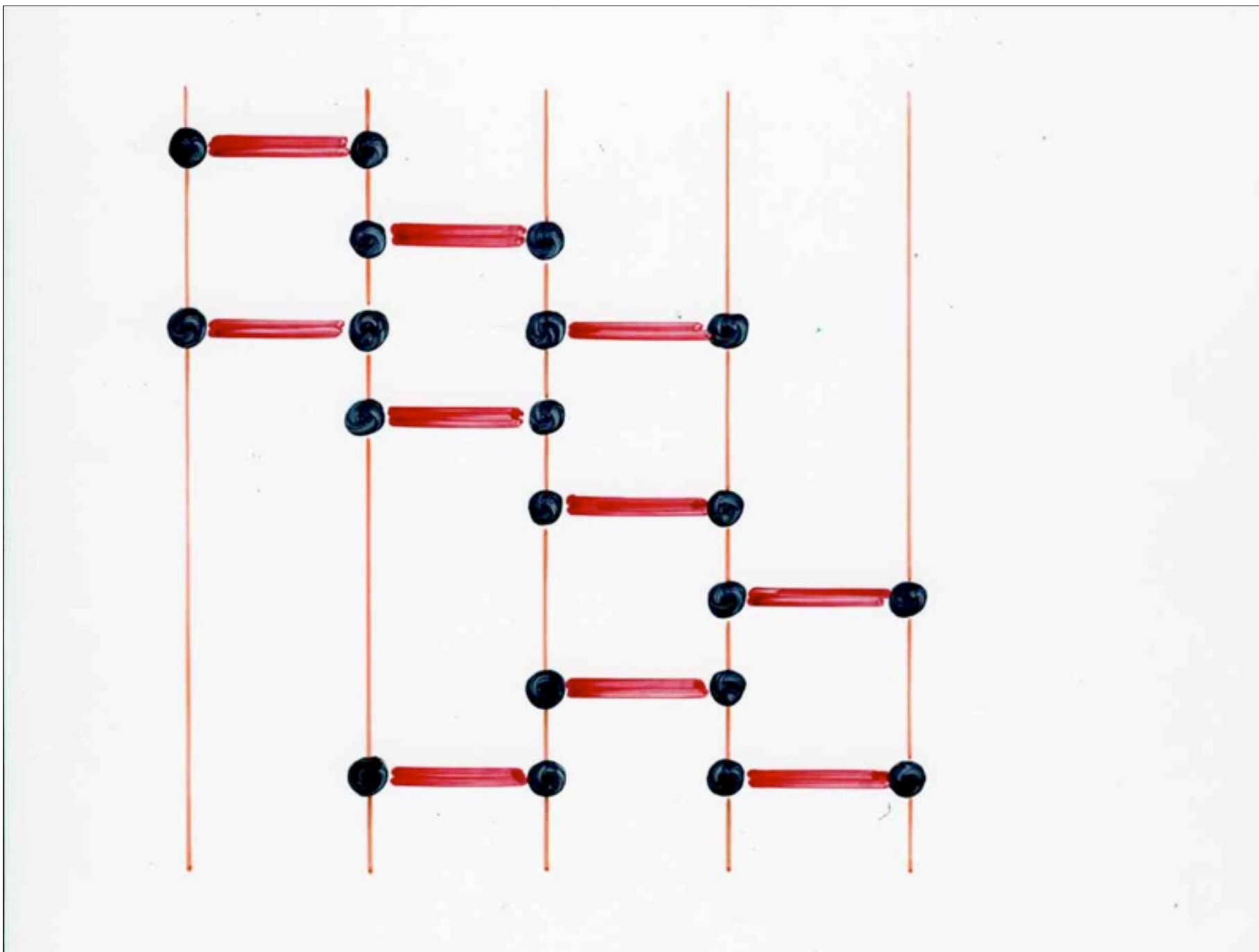
empilements
de
pièces

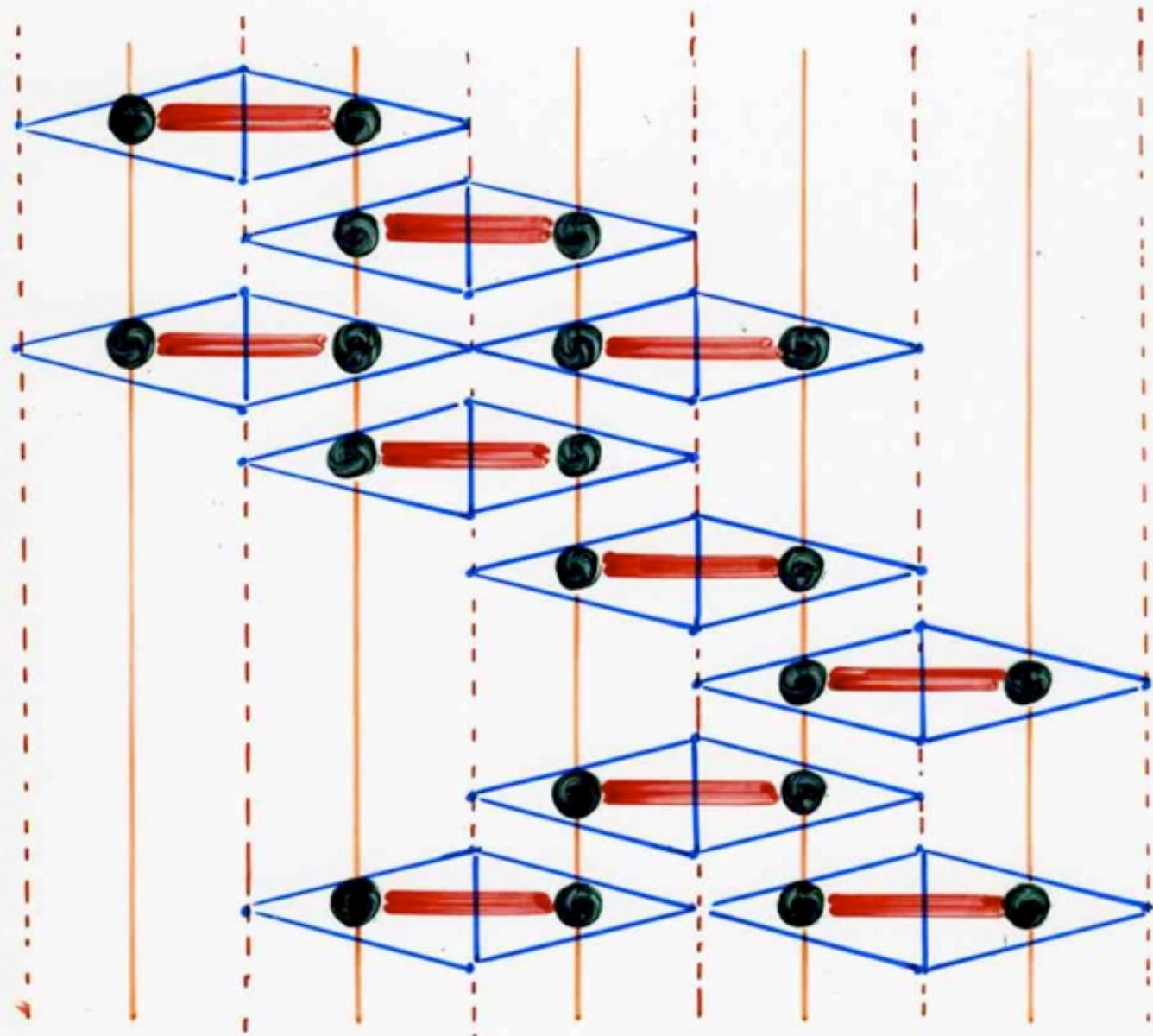
monoïdes
de
commutation

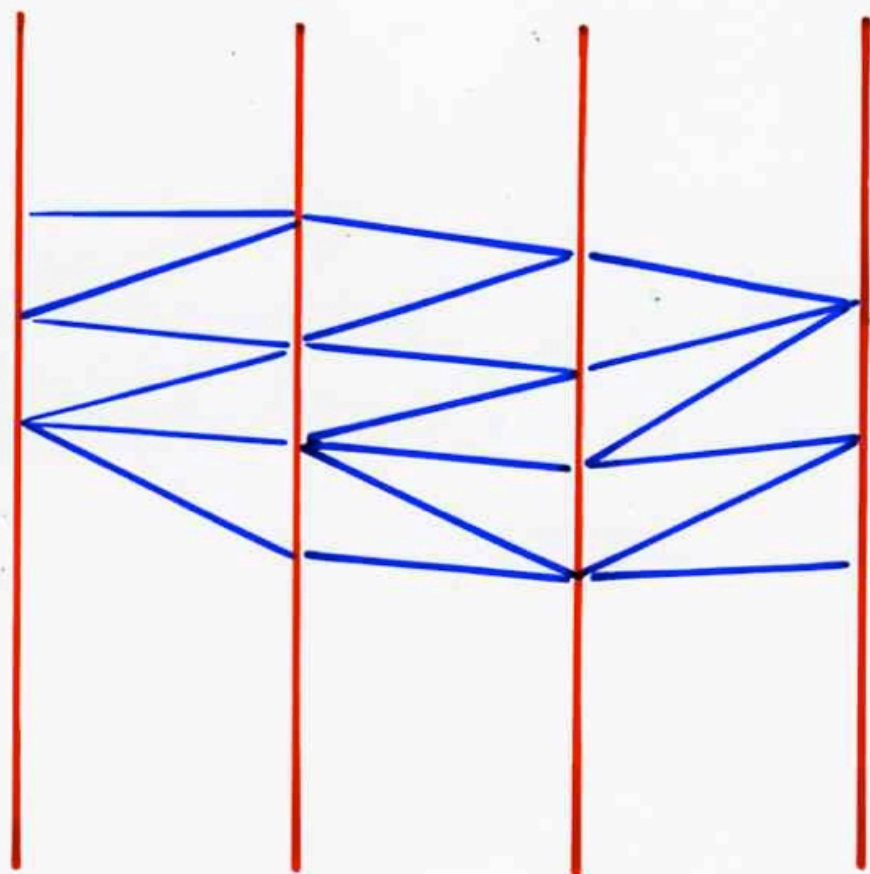


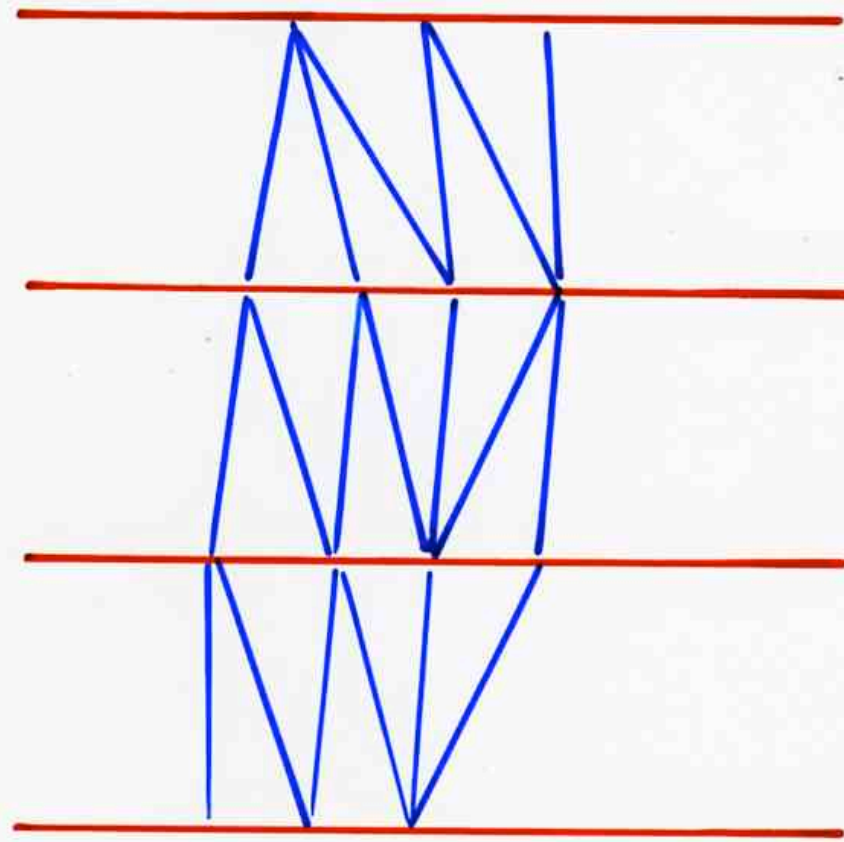


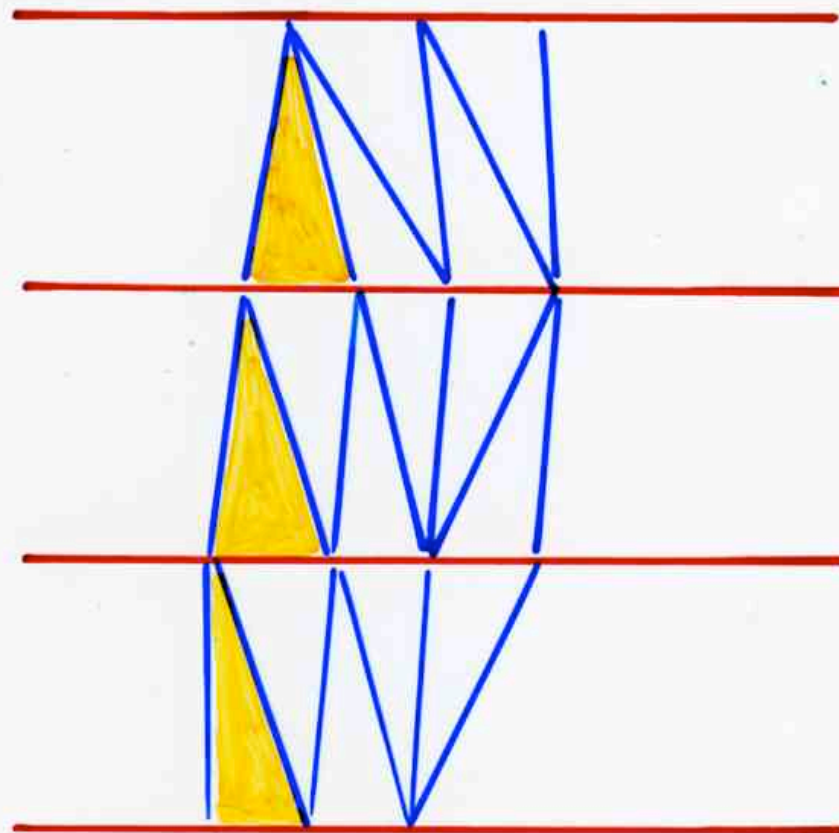
Des empilements aux
triangulations Lorentziennes















Alain Connes

géométrie
non-commutative

Renormalisation
quantique

Diagrammes de Feynman

$$\sigma^{\gamma}(\Upsilon) = \text{---} \bigcirc \text{---} \bigcirc \text{---} \bigcirc \text{---}$$

$$\sigma^{\gamma}(\Upsilon) = \text{---} \bigcirc \text{---} \bigcirc \text{---} + \text{---} \bigcirc \text{---}$$

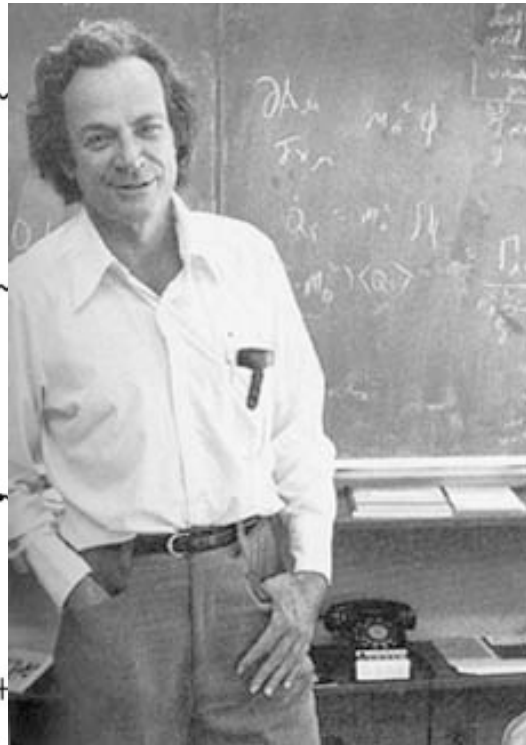
$$\sigma^{\gamma}(\Upsilon) = \text{---} \bigcirc \text{---} \bigcirc \text{---}$$

$$\sigma^{\gamma}(\Upsilon) = \text{---} \bigcirc \text{---}$$

$$\sigma^{\gamma}(\Upsilon) = \text{---} \bigcirc \text{---} + \text{---} \bigcirc \text{---}$$

$$+ \text{---} \bigcirc \text{---} + \text{---} \bigcirc \text{---}$$

$$+ \text{---} \bigcirc \text{---} + \text{---} \bigcirc \text{---} + \text{---} \bigcirc \text{---} + \text{---} \bigcirc \text{---} + \text{---} \bigcirc \text{---}$$



$$\begin{aligned}
 P \quad \text{[diagram]} \quad P \quad \text{[diagram]} &= P \quad \text{[diagram]} + P \quad \text{[diagram]} + P \quad \text{[diagram]} \\
 &+ P \quad \text{[diagram]} + P \quad \text{[diagram]} + P \quad \text{[diagram]}
 \end{aligned}$$

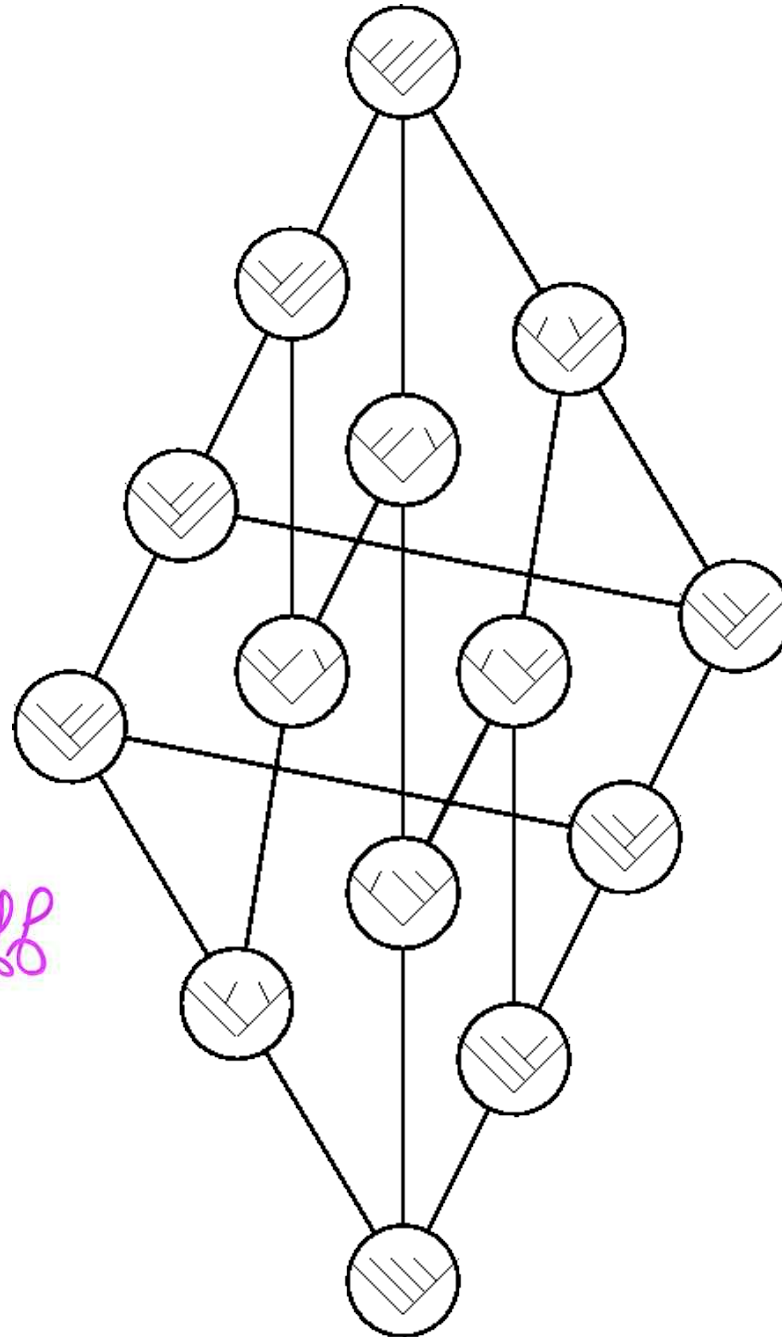
The diagrams represent rooted trees with 4 nodes. The first row shows the product of two 2-node trees (a root with two children) resulting in a sum of three 4-node trees. The second row continues the sum with three more 4-node trees. In all diagrams, the root node is represented by a larger black dot, and child nodes by smaller black dots connected by lines.

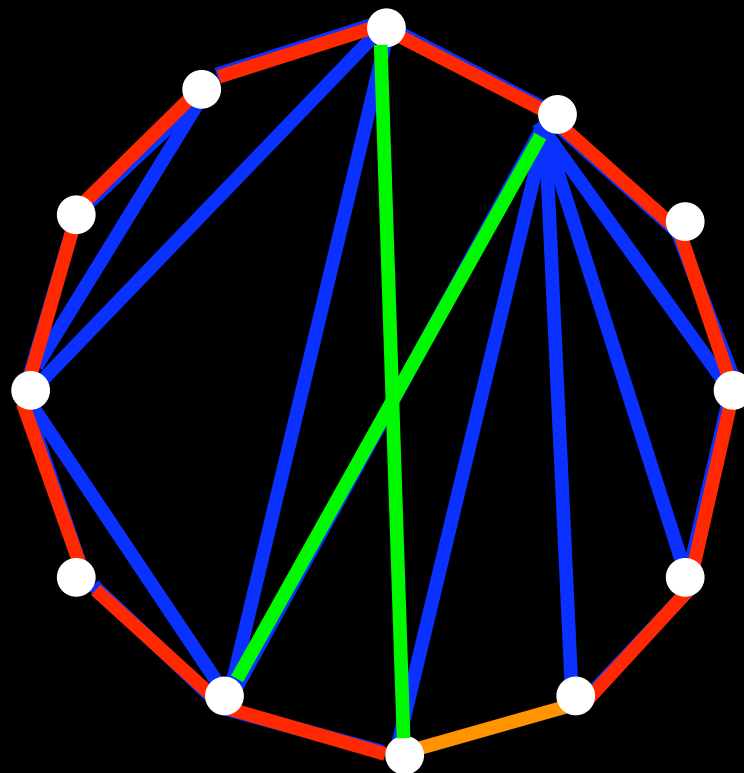
algèbre de Hopf
combinatoire

algèbre de Loday-Ronco

associaèdre

polyèdre de Stasheff





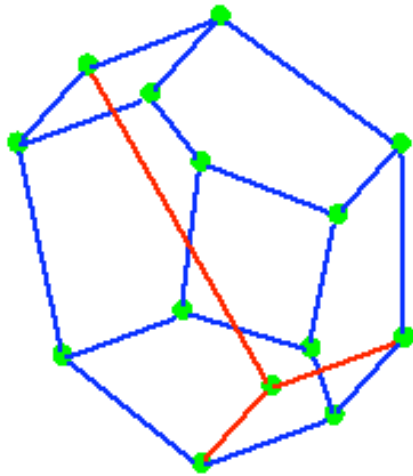
algèbres à grappes
(cluster)

Sergei Fomin

Andrei Zelevinski

systèmes de racines
 $A_n, B_n, \dots$

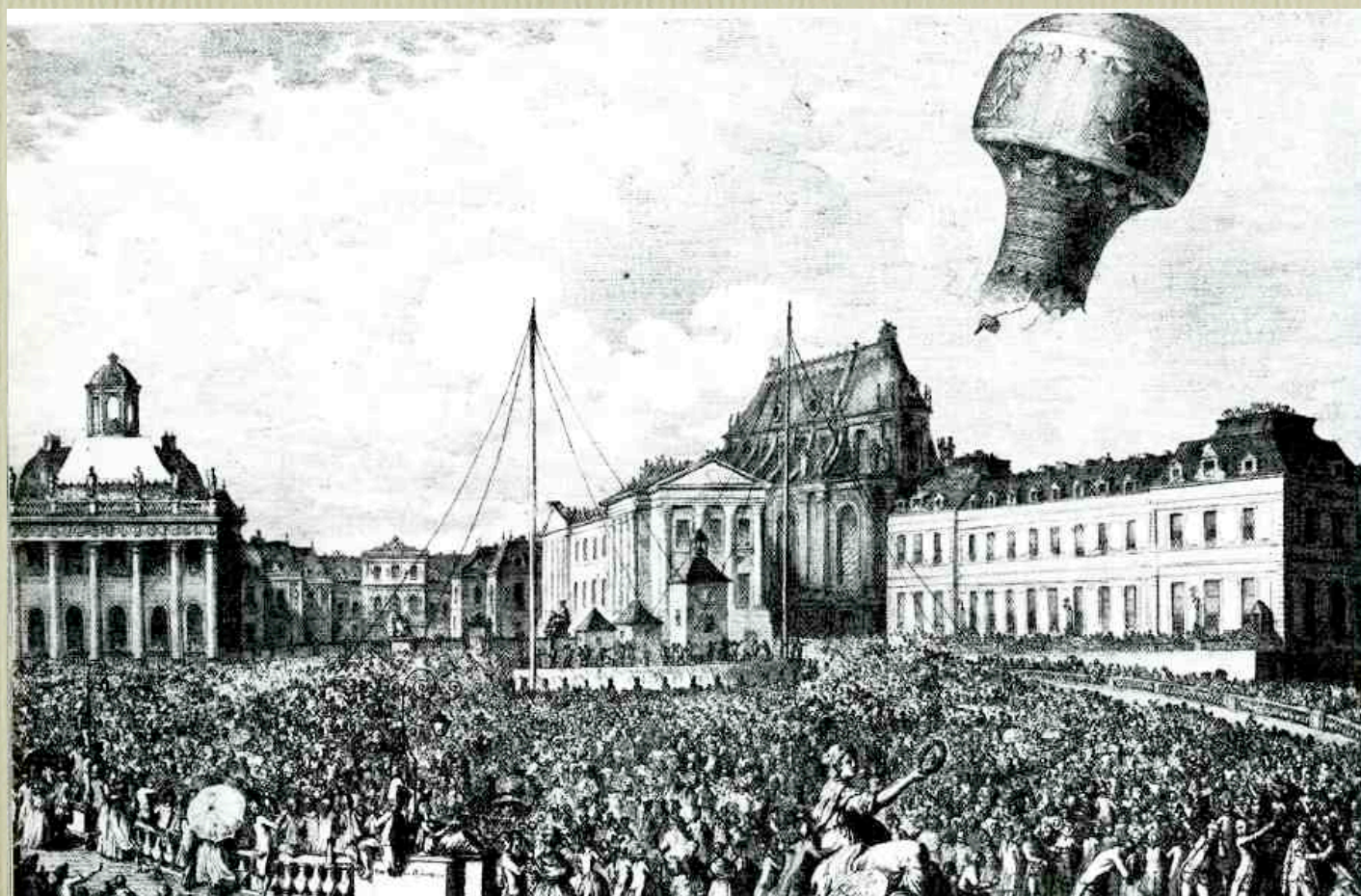
Physique



combinatoire



7 (18) Septembre 1783





Leonh. Euler.

71 ans





LEONHARD EULER
1707-1783

MATHEMATIKER, PHYSIKER,
INGENIEUR, ASTRONOM UND
PHILOSOPH, VERBRACHTE IN
RIEHN SEINE JUGENDJAHRE.
ER WAR EIN GROSSER GELEHR-
TER UND EIN GÜTIGER
MENSCH.

C A L C U L S

Sur les Ballons aérostatiques faits par feu M. Léonard Euler, tels qu'on les a trouvés sur son ardoise, après sa mort arrivée le 7 Septembre 1783.

A V E R T I S S E M E N T.

L'EXPERIENCE faite à Annonai, le 5 Juin 1783, par M.^{rs} Montgolfier, a montré la possibilité d'élever dans l'air des corps d'une grande capacité relativement à leur

Après la mort d'Euler,
l'Académie Saint-Pétersbourg
publia continument
pendant près de 50 ans ses manuscrits,
d'autres jusqu'en 1862 ...

Les éditions du livre
“Lettres à une princesse d’Allemagne”
se succédèrent pendant un siècle ...

Oeuvres complètes
Académie Suisse des Sciences

Opera Omnia
édition commencée en 1911
76 volumes publiés

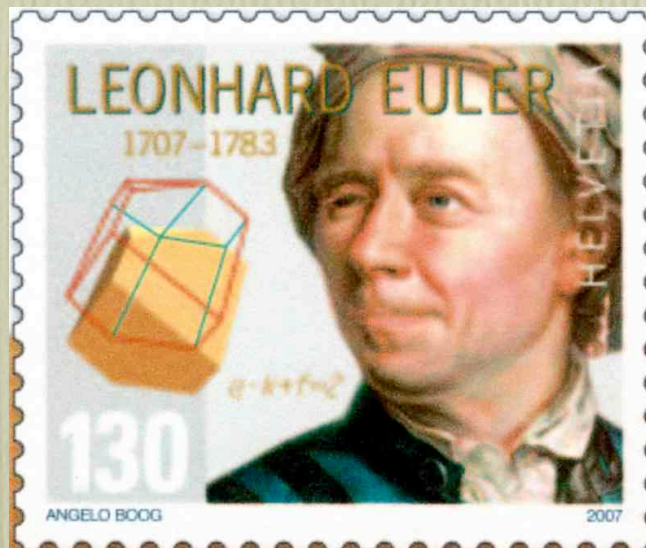
en 2007 il reste encore 6 volumes en cours ...

Il y a des arbres dans les étoiles,
des arbres dans les grains de lumière.

Les théories mathématiques s'interpellent,
s'entrecroisent, renaissent, se fondent entre elles.

Les grands Maîtres se parlent à travers les siècles
dans le jardin merveilleux des Mathématiques.

Merci Leonhard !



Marcia Pig Lagos

Mariette Freudentheil

Gérard H.E. Duchamp

Xavier Viennot

association Cont'Science

Bâle 1707 - 1727

Le siècle des Lumières

Saint-Petersbourg 1727 - 1741

Berlin 1741 - 1766

Académie royale de Paris

retour à Saint-Petersbourg 1766 - 1783

cosmique

7 (18) Septembre 1783

fin

“analyse combinatoire”

Une lettre oubliée d'Euler ...

séries formelles

Catalan 19ème

arbres
binaires

des triangulations aux arbres binaires

des arbres binaires aux chemins de Dyck

séries génératrices

théorème pentagonal

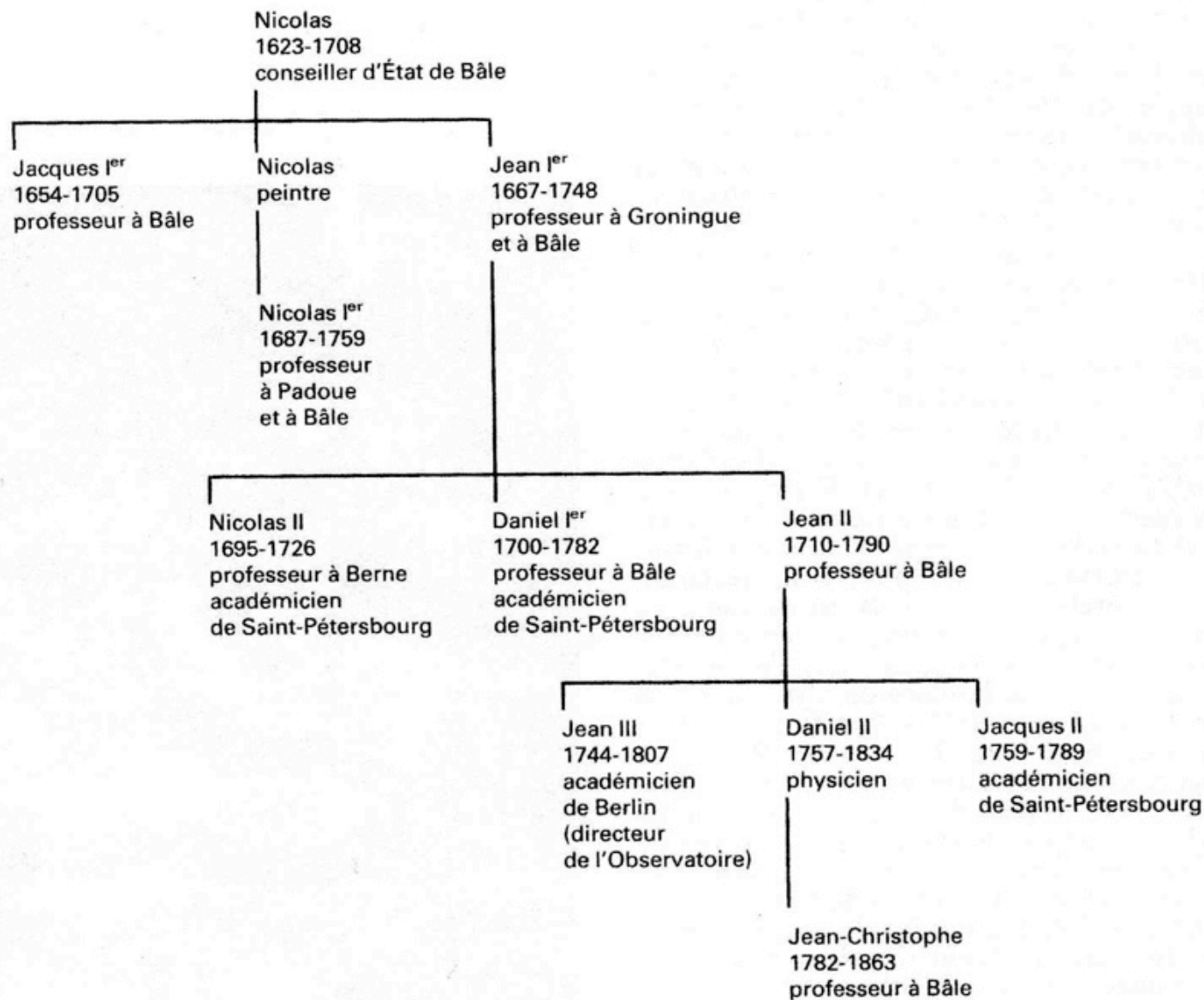
fractions continues

série exponentielle

métamorphose

gravitation quantique

fin



Alors que Daniel Bernoulli voyageait avec un homme cultivé qui ne le connaissait pas, celui-ci lui demanda son nom.

“Je suis Daniel Bernoulli”. Croyant à une plaisanterie, son interlocuteur lui répondit: “Et moi je suis Isaac Newton”. Cette anecdote, disait Daniel Benoulli, m’a fait plaisir plus que tous les honneurs.



Daniel Bernoulli
1700-1782